שיעור 9

1. משפטי לופיטל (de L'Hospital)

$$\lim_{x\to a\pm}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a\pm}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (a - כל מספר סופי או אינסוף)

באחד מהמצבים הבאים

1)

- $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות גזירות בסביבה של נקודה a (פרט אולי לנקודה עצמה)
- $g'(x)\neq 0$ בסביבה של נקודה a (פרט אולי לנקודה עצמה)
- קיימים גבולות $\lim_{x\to a\pm} f(x)=\lim_{x\to a\pm} g(x)=0$
- קיים גבול $\lim_{x\to a\pm}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

2)

- $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות גזירות בסביבה של נקודה a (פרט אולי לנקודה עצמה)
- $g'(x)\neq 0$ בסביבה של נקודה a (פרט אולי לנקודה עצמה)
- קיימים גבולות $\lim_{x\to a\pm} f(x)=\lim_{x\to a\pm} g(x)=\pm\infty$
- קיים גבול $\lim_{x\to a\pm}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

תרגילים

2. קיצון מוחלט בקטע סגור

הגדרה

תהי $y = f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום מסוים . אזי

א) נקודה x_0 נקראת נקודת **מקסימום מוחלט** בתחום אם $f(x)\le f(x_0)$ לכל x בתחום

ב) נקודה x_0 נקראת נקודת **מינימום מוחלט** בתחום אם $f(x)\ge f(x_0)$ לכל x בתחום

נקודת מקסימום או מינימום מוחלט נקראת נקודת קיצון מוחלט או נקודת אקסטרמום מוחלט

משפט

לפונקציה $y = f(x)$ הרציפה בקטע $[a, b]$ יש לפחות נקודת מקסימום מוחלט אחת ונקודת מינימום מוחלט אחת בקטע שהן נקודות הקצה של הקטע (a או b) או נקודות פנימיות ($a < x < b$) בהן $f'(x)=0$ או לא מוגדרת

תרגילים

1. מצא את נקודות קיצון המקומי ונקודות הפיתול של הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$
2. מצא את נקודות קיצון המוחלט של הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$ בקטע $[-3, 3]$ ובקטע $[1, 3]$ ואת הערכים הגדול והקטן של $f(x)$ בקטע
3. מצא את נקודות קיצון המקומי של הפונקציה $f(x) = \left|x^3 - 3x\right|$
4. מצא את נקודות קיצון המוחלט של הפונקציה $f(x) = \left|x^3 - 3x\right|$ בקטע $[-3, 3]$ ובקטע $[1, 3]$ ואת הערכים הגדול והקטן של $f(x)$ בקטע
5. מצא את נקודות קיצון המקומי של הפונקציה $f(x) = e^{-|2x-4|}$
6. מצא את נקודות קיצון המוחלט של הפונקציה $f(x) = e^{-|2x-4|}$ בקטע $[0, 3]$ ואת הערכים הגדול והקטן של $f(x)$ בקטע

3. משוואות של

- הישר המשיק לקו הפונקציה $y=f(x)$ בנקודה x_0

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

- קירוב ליניארי של הפונקציה $y=f(x)$ בסביבת נקודה x_0

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

- הישר הנורמאלי לקו הפונקציה $y=f(x)$ בנקודה x_0 בה $f'(x_0)\neq 0$

$$f(x)=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

תרגילים

1) מצא את משוואות של קווי המשיק והנורמל לגרף הפונקציה x^{x+2} בנקודה $x=1$

2) חשב תוך שימוש בקירוב ליניארי

א. $\sqrt{9.1}$

ב. $\arctan 1.02+\arctan 0.97$

ג. $\tan 44^0$

4. פולינום טיילור ומקלורן

קירוב ליניארי של הפונקציה $y=f(x)$ בסביבת נקודה x_0

$$f(x)\approx P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

קירוב מסדר 2 של הפונקציה $y=f(x)$ בסביבת נקודה x_0

$$f(x)\approx P_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

קירוב מסדר 3 של הפונקציה $y=f(x)$ בסביבת נקודה x_0

$$f(x)\approx P_3(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3$$

קירוב מסדר 4 של הפונקציה $y=f(x)$ בסביבת נקודה x_0

$$f(x)\approx P_4(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{24}(x-x_0)^4$$

קירוב מסדר n של הפונקציה $y=f(x)$ בסביבת נקודה x_0 (פולינום טיילור)

$$f(x)\approx P_n(x)==\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=$$

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ניתן להציג את הפונקציה $y=f(x)$ בסביבה של נקודה x_0

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

כאשר $R_n(x)$ נקראת שארית של הפולינום מסדר n

צורת "או קטנה" להצגת השארית $R_n(x)=o\left[(x-x_0)^n\right]$ כאשר $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{o\left[(x-x_0)^n\right]}{(x-x_0)^n}$

צורת לגרנז' להצגת השארית $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

כאשר c היא נקודה בין x_0 ל- x

משפט 1 (פולינום טיילור)

כל פונקציה $y=f(x)$ הגזירה $n+1$ פעמים בסביבת נקודה x_0 ניתן להציג בצור פולינום טיילור ושארית

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left[(x-x_0)^n\right]$$

(צורת "או קטנה" להצגת השארית) כאשר $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{o\left[(x-x_0)^n\right]}{(x-x_0)^n}$

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(צורת לגרנז' להצגת השארית) כאשר c היא נקודה בין x_0 ל- x

משפט 2 (פולינום מקלורן – מקרה פרטי של פולינום טיילור)

כל פונקציה $y=f(x)$ הגזירה $n+1$ פעמים בסביבת נקודה 0 ניתן להציג בצור פולינום טיילור ושארית

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o\left[x^n\right]$$

כאשר $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{o\left[x^n\right]}{x^n}$ ו- c היא נקודה בין 0 ל- x

פעולות חשבון עם "או קטנה"

1) $o(x^n)+o(x^n)=o(x^n)-o(x^n)=\alpha\cdot o(x^n)=o(x^n)$ **כאשר** $\alpha\neq 0$

2) $o(x^n)\cdot o(x^m)=o(x^{n+m})$

3) $x^n\cdot o(x^m)=o(x^{n+m})$

4) $\left[o(x^n)\right]^m=o(x^{n\cdot m})$

5) $o(x^n)\pm o(x^m)=o(x^n)$ **במידה ו-** $n\le m$

תרגילים

3) חשבו את הביטויים הבאים עם רמת הדיוק (כך ששגיאת החישוב לא תעלה על) 10^{-3}

א) $e^{0.2}$ ב) $\cos\left(\frac{4\pi}{15}\right)$ ג) $\sqrt{4.1}$

4) חשב את הגבולות הבאים תוך שימוש בפולינום מקלורן

א) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}+e^{-x}-2}{x^3}$ ב) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-\cos 5x}$

ג) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^2}{4}}+2\cos\left(\frac{x}{2}\right)-3}{x^4}$ ד) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin^2 5x}{\cos 2x-\cos 4x}$

ה) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^3}-e^{\frac{x^3}{2}}}{x^6}$