שיעור 8

1. משפטי רציפות וגזירות

משפטי ווירשטראס

אם פונקציה $y=f(x)$ רציפה בקטע $[a,\ b]$ אז היא חסומה ומקבלת בו את הערכים

הגדול והקטן בקטע – קיימות נקודות $a \le x_1,\ x_2 \le b$

כך ש-$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ לכל $a \le x \le b$

משפט פרמה

אם פונקציה $y=f(x)$ מוגדרת בקטע $(a,\ b)$,

מקבלת את הערך הגדול או הקטן שלה בקטע בנקודה x_0 $(a < x_0 < b)$

וגזירה בנקודה x_0 אז $f'(x_0)=0$

רמז להוכחה – יש להראות כי $f'_+(x_0) \le 0$ ו- $f'_-(x_0) \ge 0$ או להפך

משפט רול

אם פונקציה $y=f(x)$ רציפה בקטע $[a,\ b]$, גזירה בקטע $(a,\ b)$

ומקיימת $f(a)=f(b)=0$ אז קיימת נקודה c $(a < c < b)$

כך ש- $f'(c)=0$

רמז להוכחה – יש להשתמש במשפטי ווירשטראס ומשפט פרמה

משפט לגרנז'

אם פונקציה $y=f(x)$ רציפה בקטע $[a,\ b]$ וגזירה בקטע $(a,\ b)$

אז קיימת נקודה c $(a < c < b)$ כך ש- $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

רמז להוכחה – להגדיר את משוואת הקו הישר $y=u(x)$ העובר דרך נקודות

$(a,\ f(a))$ ו- $(b,\ f(b))$ ולהשתמש במשפט רול עבור $g(x)=f(x)-u(x)$

משפט הערך הממוצע של קושי

אם פונקציות $y=f(x)$ ו- $y=g(x)$ רציפות בקטע $[a,\ b]$ וגזירות בקטע $(a,\ b)$

ו- $g'(x) \ne 0$ לכל $a < x < b$ אז קיימת נקודה c $(a < c < b)$

כך ש- $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

רמז להוכחה – להשתמש במשפט רול עבור

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right]$$

תרגילים

1) הוכח כי פונקציה ריבועית $f(x)=Ax^2+Bx+C$ מקיימת את תנאיי משפט לגרנז' בכל קטע $[a,b]$ ונקודה c כמו במשפט היא תמיד אמצע הקטע

2) הוכח כי אם לפונקציה $f(x)$ הגזירה בכל נקודה $x\in\mathbf{R}$ יש n שורשים שונים אז ל- $f'(x)$ יש לפחות $n-1$ שורשים שונים

3) יהיו $f(x),g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b).
הוכח שאם $f(a)=g(a)$ ו- $f(b)=g(b)$ אז קיימת נקודה c, $a<c<b$ שבה $f'(c)=g'(c)$

4) תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[0,2]$ וגזירה בקטע $(0,2)$, ו- $f(0)=f(2)=0$
הוכח שקיימות שתי נקודות $c_2\in(1,2)$, $c_1\in(0,1)$ כך ש- $f'(c_1)+f'(c_2)=0$

5) נתונה $f(x)=(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$. הוכח שלמשוואה $f'(x)=0$ יש בדיוק $n-1$ שורשים שונים

6) יהיו $f(x)$, $g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $[a,\infty)$ וגזירות בקטע (a,∞) , $f(a)=g(a)$
ו- $f'(x)\le g'(x)$ $\forall x>a$. הוכח ש- $f(x)\le g(x)$ $\forall x>a$

7) תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ וגזירה בקטע $(0,1)$, $f(0)=f(1)=0$ ו- $\max_{x\in[0,1]} f(x)=1$ הוכח כי קיימת נקודה c , $0<c<1$, שבה $|f'(c)|\ge 2$

2. משפטי חקירת פונקציה

משפט 1

פונקציה f הגזירה בקטע (a,b) תהיה קבועה בקטע (a,b) אם ורק אם $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$ (רמז להוכחה – יש להשתמש במשפט לגרנז')

הגדרה

פונקציה f המוגדרת בקטע (a,b) נקראת

- **מונוטונית עולה** בקטע אם ורק אם $f(x_1)<f(x_2)$ לכל $x_1<x_2$ בקטע
- **מונוטונית יורדת** בקטע אם ורק אם $f(x_1)>f(x_2)$ לכל $x_1<x_2$ בקטע

משפט 2

אם פונקציה $y=f(x)$ גזירה בקטע (a,b) אזי

א) $f(x)$ מונוטונית עולה בקטע אם ורק אם $f'(x)>0$ לכל x בקטע

ב) $f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע אם ורק אם $f'(x)<0$ לכל x בקטע

(רמז להוכחה – יש להשתמש במשפט לגרנז')

הגדרה

תהי $y=f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה x_0. אזי

- נקודה x_0 נקראת **נקודת מקסימום מקומי** אם $f(x)\le f(x_0)$ לכל x בסביבה של x_0 (קיים $\delta>0$ כך ש- $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)\le f(x_0)$)
- נקודה x_0 נקראת **נקודת מינימום מקומי** אם $f(x)\ge f(x_0)$ לכל x בסביבה של x_0 (קיים $\delta>0$ כך ש- $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$)

נקודת מקסימום או מינימום מקומי נקראת **נקודת קיצון מקומי** או **נקודת אקסטרמום מקומי**

משפט 3 (תנאי הכרחי לקיום אקסטרמום מקומי)

תהי $y=f(x)$ פונקציה גזירה בסביבה של נקודת קיצון x_0 אז $f'(x_0)=0$

(מסקנה - נקודה x_0 חשודה לנקודת קיצון מקומי אם $f'(x_0)=0$ או לא מוגדרת)

משפט 4 (תנאי מספיק לקיום אקסטרמום מקומי עפ"י נגזרת ראשונה)

תהי $y=f(x)$ פונקציה ויהי $\delta>0$ כך ש-

f רציפה בתחום $|x-x_0|<\delta$ וגזירה בתחום $0\neq|x-x_0|<\delta$. אזי

א) נקודה x_0 היא נקודת מקסימום מקומי אם קיים $\delta>0$ כך ש-

$x<x_0+\delta \Rightarrow f'(x)\le 0$ ו- $x>x_0-\delta \Rightarrow f'(x)\ge 0$

ב) נקודה x_0 היא נקודת מינימום מקומי אם $f'(x)\le 0$ לכל $x<x_0$ בסביבה

ו- $f'(x)\ge 0$ לכל x בסביבה של $x>x_0$ בסביבה של x_0

ג) נקודה x_0 אינה נקודת קיצון מקומי אם $f'(x)>0$ לכל x בתחום

$0\neq|x-x_0|<\delta$ או $f'(x)<0$ לכל x בתחום $0\neq|x-x_0|<\delta$

הגדרה

א) פונקציה $f(x)$ נקראת קמורה כלפי מטה ("מחייכת") בקטע $[a,b]$ אם לכל 2

נקודות x_1,x_2 בקטע מתקיים $$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

(ערך הפונקציה באמצע כל קטע נמצא מתחת לממוצע של ערכי הפונקציה בקצוות הקטע)

ב) פונקציה $f(x)$ נקראת קמורה כלפי מעלה ("בוכה") בקטע $[a,b]$ אם לכל 2

נקודות x_1,x_2 בקטע מתקיים $$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

(ערך הפונקציה באמצע כל קטע נמצא מעל הממוצע של ערכי הפונקציה בקצוות הקטע)

ג) נקודה x_0 נקראת נקודת פיתול של $f(x)$

במידה וכוון הקמירות מתחלף בנקודה x_0

משפט 5

תהי $y=f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה x_0. אזי

- $f(x)$ קמורה כלפי מטה ("מחייכת") בנקודה x_0 אם ורק אם

  $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ לכל x בסביבה של x_0

  (קו של פונקציה נמצא מעל הישר המשיק בנקודה x_0)
- $f(x)$ קמורה כלפי מעלה ("בוכה") בנקודה x_0 אם ורק אם

  $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ לכל x בסביבה של x_0

  (קו של פונקציה נמצא מתחת לישר המשיק בנקודה x_0)

משפט 6

תהי $y=f(x)$ פונקציה גזירה פעמים בקטע (a,b). אזי

א) $f(x)$ קמורה כלפי מטה ("מחייכת") בקטע (a,b) אם $f''(x)>0$ לכל x בקטע (a,b)

ב) $f(x)$ קמורה כלפי מעלה ("בוכה") בקטע (a,b) אם $f''(x)<0$ לכל x בקטע (a,b)

משפט 7 *(תנאי מספיק לקיום אקסטרמום מקומי עפ"י נגזרת ראשונה ושנייה)*

אם פונקציה $y=f(x)$ גזירה פעמים בנקודה x_0 ו- $f'(x_0)=0$ אם

א) נקודה x_0 היא נקודת מקסימום מקומי אם $f''(x_0)>0$

ב) נקודה x_0 היא נקודת מינימום מקומי אם $f''(x_0)<0$

משפט 8 *(תנאי מספיק לקיום נקודת פיתול עפ"י נגזרת ראשונה ושנייה)*

תהי $y=f(x)$ פונקציה גזירה פעמים בנקודה x_0 . אזי $f'(x_0)=0$ x_0 היא נקודת פיתול במידה ו- $f'(x_0)\neq 0$ ו- $f''(x_0)=0$

הערה

נקודה x_0 היא נקודת מקסימום או מינימום מקומי או נקודת פיתול *(לא ניתן לדעת על סמך נתון זה בלבד)* אם $f'(x_0)=f''(x_0)=0$

הגדרה

א) קו ישר $x = x_0$ נקרא **אסימפטוטה אנכית** של פונקציה $y = f(x)$ אם
$f(x)$ אינה מוגדרת בנקודה $x = x_0$ ו- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

ב) קו ישר $x = x_0$ נקרא **אסימפטוטה אנכית חד צדדית** של פונקציה $y = f(x)$ אם
$\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \infty$ או $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \infty$

ג) קו ישר $y = ax + b$ נקרא **אסימפטוטה משופעת דו צדדית** של פונקציה
$y = f(x)$ אם $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ו- $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b$

ד) קו ישר $y = ax + b$ נקרא **אסימפטוטה משופעת ימנית** של פונקציה $y = f(x)$
אם $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ו- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$

ה) קו ישר $y = ax + b$ נקרא **אסימפטוטה משופעת שמאלית** של פונקציה
$y = f(x)$ אם $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ו- $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b$

ו) קו ישר $y = b$ נקרא **אסימפטוטה אופקית דו צדדית** של פונקציה
$y = f(x)$ אם $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ו- $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b$

ז) קו ישר $y = b$ נקרא **אסימפטוטה אופקית ימנית** של פונקציה $y = f(x)$
אם $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ו- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$

ח) קו ישר $y = b$ נקרא **אסימפטוטה אופקית שמאלית** של פונקציה
$y = f(x)$ אם $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ו- $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b$

הערה
אסימפטוטה אופקית היא אסימפטוטה משופעת עם שיפוע ששווה לאפס

שלבי חקירת פונקציה

1) תכונות כלליות של פונקציה -
תחום ההגדרה, נקודות חיתוך, סימנים, זוגיות(במידה ויש), מחזוריות(במידה ויש)

2) גבולות של פונקציה – אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות

3) נגזרת ראשונה של פונקציה – תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון

4) נגזרת שנייה של פונקציה – תחומי קמירות ונקודות פיתול

5) סקיצה של גרף הפונקציה