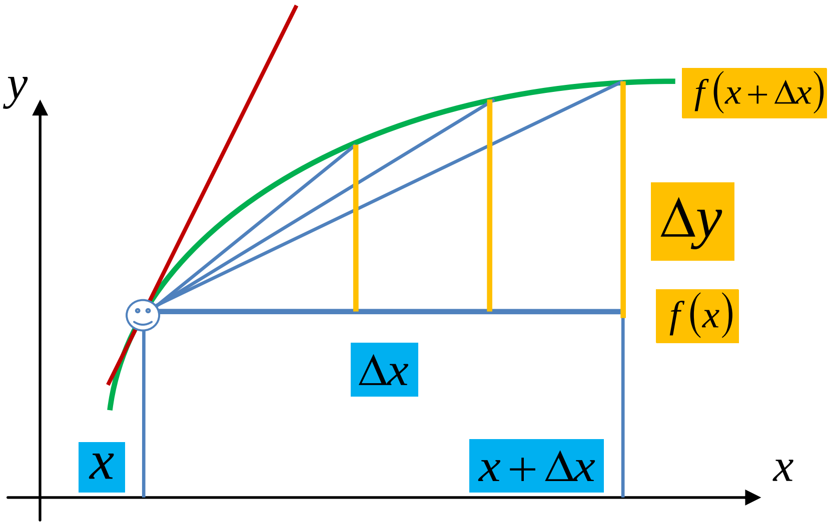
שיעור 7 נגזרת של פונקציה

שיפוע והגדרת הנגזרת של פונקציה

$y = f(x)$



שיפוע = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

נגזרת = $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

הגדרה

תהי $y = f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x = x_0$.

$f(x)$ נקראת **גזירה** בנקודה x_0 במידה וקיים גבול

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

הנקרא **נגזרת** של $f(x)$ בנקודה x_0 ומסומן $f'(x_0)$

הערות

1. אם $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אם $f(x)$ רציפה בנקודה x_0
2. אם $f(x)$ אינה רציפה בנקודה x_0 אם $f(x)$ אינה גזירה בנקודה x_0

סולם "טיב" הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0

1) מוגדרת, רציפה וגזירה אינסוף פעמים
2) מוגדרת, רציפה וגזירה מספר סופי של פעמים (... 2,3,4)
3) מוגדרת, רציפה וגזירה (פעם אחת)
4) מוגדרת, רציפה אך אינה גזירה
5) מוגדרת אך אינה רציפה ולכן אינה גזירה
6) לא מוגדרת ולכן אינה רציפה ואינה גזירה

דוגמאות

1. $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ אינה מוגדרת בנקודה $x=0$ לכן אינה רציפה בנקודה $x=0$

ולכן אינה גזירה בנקודה $x=0$

2. $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$ מוגדרת אך אינה רציפה בנקודה $x=0$ מפני ש-

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0\neq 1=f(0)$$

(פונקציה חסומה $-1\leq\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$ כפול פונקציה אפיסה $\lim_{x\to 0} x=0$)

ולכן אינה גזירה בנקודה $x=0$

3. $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ מוגדרת ורציפה בנקודה $x=0$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0=f(0)$. נבדוק את הגזירות עפ"י ההגדרה

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ \ (\Delta x=x)$$

הגבול לא קיים לכן $f(x)$ אינה גזירה בנקודה $x=0$

תרגילים – הראה כי פונקציה $f(x)$ רציפה אך אינה גזירה בנקודה $x=0$

$1)\ f(x)=|x|\quad 2)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

(רמז – להראות כי קיים $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ ולא קיים $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$)

או $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

תרגיל – מצא נגזרת של $f(x)=|x|$ בכל נקודה $x\neq 0$

פתרון

$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ לכן $f'(x)=|x|=\begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

תרגיל – הראה כי פונקציה $26)\ f(x)=\begin{cases} (x+1)^2, & x\geq 0 \\ \sin 2x+1, & x<0 \end{cases}$

רציפה וגזירה בנקודה $x=0$

כללי הגזירה – אם פונקציות f, g גזירות בנקודה x אז גם הפונקציות $f+g, f-g, f\cdot g$ גזירות בנקודה x ומתקיים

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

$$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

ולכל קבוע C גם הפונקציה $C\cdot f$ גזירה בנקודה x ומתקיים

$$[C\cdot f(x)]'=C\cdot f'(x)$$

וכאשר $g(x)\neq 0$ אז גם הפונקציה $\frac{f(x)}{g(x)}$ גזירה בנקודה x ומתקיים

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

תרגילים – הוכח את כללי הגזירה הנ"ל תוך שימוש בהגדרה

תרגילים – חשב תוך שימוש בכללי גזירה

6) $f(x)=x^2\cdot\sin x$

7) $f(x)=\frac{5x^2-4e^x}{7x^2+2\sin x}$

8) $f(x)=\tan x$

9) $f(x)=\cot x$

תשובות

נגזרת של פונקציה הופכית - אם פונקציה f גזירה בנקודה x אז גם הפונקציה f^{-1} גזירות בנקודה $y=f(x)$ ומתקיים

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}=\frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}$$

תרגיל – הוכח את כלל נגזרת של פונקציה הופכית תוך שימוש בהגדרה

תרגילים – חשב תוך שימוש בנגזרת של פונקציה הופכית

10) $f(x)=\ln x$

11) $f(x)=\arctan x$

12) $f(x)=\arcsin x$

תשובות

נגזרות בסיסיות

1) $(C)'=0$	4) $(\log_a x)'=\frac{\log_a e}{x}$	8) $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
2) $(x^m)'=mx^{m-1}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	9) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3) $(a^x)'=a^x\ln a$	5) $(\sin x)'=\cos x$	10) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)'=e^x$	6) $(\cos x)'=-\sin x$	11) $(\arctan x)'=\frac{1}{x^2+1}$
	7) $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	12) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{x^2+1}$

נגזרת של פונקציה מורכבת תרגילים – אם פונקציה u גזירה בנקודה x ופונקציה F גזירה בנקודה $u(x)$

$$F'(x)=f(x)=\frac{dF}{dx}\Rightarrow F'(u(x))=f(u(x))\cdot u'(x)=\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

בפרט

$$F'(x)=f(x)=\frac{dF}{dx}\Rightarrow F'(ax+b)=f(ax+b)\cdot a=a\cdot f(ax+b)$$

תרגילים – חשב תוך שימוש בכללי גזירה

13) $f(x)=\frac{1}{3x^2+x+4}$

14) $f(x)=e^{5x}\sin 4x$

15) $f(x)=\arctan(3x^4-5x^2+7x-9)$ תשובות

16) $f(x)=\ln\left[(3x-5)^4(5x-2)^6(4x+9)^8\right]$

17) $f(x)=\ln\sqrt[6]{\frac{3x-5}{(4x+3)^5}}$

גזירה לוגריתמית

$$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = [\ln f(x)]' \Rightarrow y' = y\cdot[\ln f(x)]'$$

$$f'(x) = f(x)\cdot[\ln f(x)]'$$

תרגילים – גזור את הפונקציות הבאות בשיטה הלוגריתמית

18) $f(x) = (3x-5)^4(5x-2)^6(4x+9)^8$

19) $f(x) = \sqrt[6]{\dfrac{3x-5}{(4x+3)^5}}$

20) $f(x) = x^x$

21) $f(x) = (\arctan x)^x$

22) $f(x) = (\ln x)^{\sqrt{x}}$

23) $f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{x}}$

תשובות

תרגילים – גזור את הפונקציות $y = f(x)$ המוגדרות בצורה סתומה תוך שימוש בכלל השרשרת - חשב את הנגזרת בנקודה (x, y) כלשהי ובנקודה P הנתונה (בדוק תחילה כי הנקודה שייכת לפונקציה)

24) $\dfrac{x^4}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 10,\ \ P(2,2)$

25) $\sin x\cos y + \cos x\sin y = x - y + \dfrac{2+\pi}{2},\ \ P\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

תשובות