

## תרגיל 7

1) תהי  $f(x)$  פונקציה רציפה על כל הישר המקיימת  $f(1)=3$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=-3$   
 הוכיחו כי קיימת לפחות נקודה אחת  $a$  בה  $f(a)=a$ .

2) תהי  $f(x)$  פונקציה רציפה על כל הישר, ונניח כי לכל  $x$  מתקיים  $|f(x)| \leq 1$ .  
 כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x)=\sin(x)$ ?

3) עבור אילו ערכי  $a$  הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x-1}} & x \neq 1, x > 0 \\ a & x = 1 \end{cases}$  רציפה בתחום  $x > 0$ ?

האם הפונקציה חסומה בקטע  $[1,2]$ ?

4) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:  
 "תהי  $f(x)$  פונקציה מחזורית, ורציפה בכל הישר. אז  $f(x)$  חסומה בכל הישר."

5) מיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

א)  $\frac{x^3-8}{x-2}$  ב)  $\frac{\sin(8x)}{x}$  ג)  $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-2}}}$  ד)  $e^{\frac{1}{x}}$  ה)  $\frac{x^2}{(x+1)^4}$  ו)  $\frac{x+2}{x^3+8}$  ז)  $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

ח)  $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$  ט)  $[x] \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$  י)  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$

6) חשבו את הנגזרות של כל אחת מהפונקציות הבאות:

א)  $(x^2+3x-4)^{20}$  ב)  $e^{x \sin^2(x)}$  ג)  $\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{1-x}}$  ד)  $\arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  (ע)  $\ln(x^4+3x^3+x)$  ו)  $\arctan(x^2)$  ז)  $\arctan(x)^x$  ח)  $f(x) = \begin{cases} 6x+9 & x \geq 2 \\ 15+1.5x^2 & x < 2 \end{cases}$

7) נסתכל בפונקציה  $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

א) לאילו ערכי  $\alpha$  הפונקציה רציפה בכל הישר?

ב) לאילו ערכי  $\alpha$  הפונקציה גזירה בכל הישר?

ג) לאילו ערכי  $\alpha$  הפונקציה גזירה ברציפות בכל הישר?

8) רשמו את משוואת המשיק לעקומה  $y=x^3$  בנקודה  $(-2,-8)$ .

9) מצאו את הנקודות על העקומה  $2x^3-3x^2-12x-5$  שבהן המשיק מקביל לציר  $x$ .

10) מצאו מקדמים  $a, b$  כך שהפונקציות הבאות יהיו גזירות ורציפות על כל הישר:  
האם קיימים מקדמים כך שהפונקציות גזירות פעמיים על כל הישר?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| \geq 1 \\ ax^2 + b & |x| < 1 \end{cases} \quad (א)$$

$$h(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x > 0 \\ ax^2 + bx + c & x \leq 0 \end{cases} \quad (ב)$$