

## חקירת פונקציות רציונליות

(1) עבור הפונקציות הבאות מצא את

(a) תחום העלייה של הפונקציה; (b) תחום הירידה של הפונקציה

$$\begin{aligned} 83) y &= 2x^2 - 8x + 5; & 84) y &= -3x^2 - 2x + 1; & 85) y &= x^3 - 2x^2 + x + 4; \\ 86) y &= -2x^3 + x^2 + 20x + 3; & 87) y &= \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}; & 88) y &= \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}; \\ 89) y &= \frac{1}{x^2 + 4x + 6}; & 90) y &= \frac{2x^2 - 2x + 3}{(x - 3)^2}; & 91) y &= \frac{-8x^2 + 32x - 27}{4x^2 - 16x + 15}; \\ 92) y &= \frac{-x^2 - 4x - 5}{x^2 + 4x + 3}; & 93) y &= \frac{x^2 + 9x + 21}{x^2 + 8x + 17}. \end{aligned}$$

(2) מצא את הנקודות של המקסימום המקומי ואת הנקודות של המינימום המקומי של הפונקציות הבאות

$$\begin{aligned} 94) y &= x^2 - 6x + 2; & 95) y &= -3x^2 + 3x - 1; & 96) y &= 2x^3 - x^2 - 4x - 1; \\ 97) y &= -x^3 + 3x^2 + 1; & 98) y &= 6 \cdot \frac{3 - x}{x^2 - 6x + 18}; & 99) y &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 6x + 72}{x + 4}; \\ 100) y &= \frac{3x^2 - 18x + 31}{x^2 - 6x + 11}; & 101) y &= \frac{3x^2 - 5x + 3}{(x - 1)^2}; & 102) y &= \frac{1 - 6x^2}{9x^2 - 1}; \\ 103) y &= 2 \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 2}; & 104) y &= \frac{-3x^2 + 10x - 11}{x - 2}; & 105) y &= \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 7}. \end{aligned}$$

(3) מצא את נקודות הפיתול של הגרפים של הפונקציות הבאות

$$\begin{aligned} 119) y &= x^3 - 3x^2 + 3x - 5; & 120) y &= -3x^3 - 9x^2 - 5x + 2; \\ 121) y &= x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 14x + 20; & 122) y &= \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 15x + 16; \\ 123) y &= \frac{-x^2 - 28}{x^2 + 12}; & 124) y &= \frac{3x + 10}{(x + 4)^2}; & 125) y &= 4 \cdot \frac{x}{x^2 + 3}; & 126) y &= \frac{4x^2 + 4x - 1}{4x^2 - 1}; \\ 127) y &= \frac{-x^2 - 4x - 3}{x^2 + 4x + 7}; & 128) y &= \frac{-x^2 - x - 1}{(x + 2)^2}; & 129) y &= \frac{-3x^2 + 3x - 1}{3x^2 + 1}; \\ 130) y &= \frac{-3x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

(4) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הגרפים של הפונקציות הבאות

$$\begin{aligned} 155) y &= \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}; & 156) y &= \frac{3x - 8}{2x + 5}; & 157) y &= \frac{x^3}{3x + 1}; & 158) y &= \frac{x - 4}{x^2 - 9}; \\ 159) y &= \frac{2x^2 - 3x + 5}{2x^2 - 8}; & 160) y &= \frac{2}{2x^2 - 5x + 2}; & 161) y &= \frac{3x^2 + x - 1}{6x^2 - x - 1}; \\ 162) y &= \frac{1}{x^3 - 9x}; & 163) y &= \frac{2x - 1}{x^3 - x}; & 164) y &= \frac{4x^2 - 1}{x^3 + 2x}; & 165) y &= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6}; \\ 166) y &= \frac{3x^2 + x - 14}{x^2 - 4}; & 167) y &= \frac{3x + 15}{x^3 - 25x}; & 168) y &= \frac{3x^2 - 48}{x^3 - 16x}. \end{aligned}$$

חקור את הפונקציות הבאות ובנה את גרפי הפונקציות (2)

192)  $y = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^2 - 16x + 7}{2x + 1}$ ; 193)  $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1}$ ; 194)  $y = 3 \cdot \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3}$ ;  
195)  $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - x - 12}{x + 2}$ ; 196)  $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4x^2 - 16x - 7}{x^2 + 4x + 3}$ ; 197)  $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4}$ ;  
198)  $y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{8x^2 - 14x + 5}{(x - 1)^2}$ ; 199)  $y = \frac{1}{4} \cdot \frac{-4x^2 + 8x + 21}{x - 2}$ ; 200)  $y = 4 \cdot \frac{-x^2 + 3x - 2}{4x^2 - 12x + 5}$ ;  
201)  $y = 2 \cdot \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3}$ ; 202)  $y = \frac{-x^2 + 8x - 12}{2x - 3}$ ; 203)  $y = 2 \cdot \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 6x + 12}$ ;  
204)  $y = 2 \cdot \frac{x^2 + 3x}{(x + 1)^2}$ ; 205)  $y = \frac{1}{3} \cdot \frac{10x^2 + 21x - 10}{x^2 - 1}$ ; 206)  $y = \frac{x^3}{x^2 + 3}$ ; 207)  $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ .

תשובות

83)  $y' = 4x - 8$ , a)  $x > 2$ , b)  $x < 2$ ; 84)  $y' = -6x - 2$ , a)  $x < -\frac{1}{3}$ , b)  $x > -\frac{1}{3}$ ;  
85)  $y' = 3x^2 - 4x + 1$ , a)  $x < \frac{1}{3}$  **IA**  $x > 1$ , b)  $\frac{1}{3} < x < 1$ ;  
86)  $y' = -6x^2 + 2x + 20$ , a)  $-\frac{5}{3} < x < 2$ , b)  $x < -\frac{5}{3}$  **IA**  $x > 2$ ;  
87)  $y' = 2 \cdot \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$ , a)  $x < -1$  **IA**  $x > 1$ , b)  $-1 < x < 1$ ;  
88)  $y' = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2}$ , a)  $x < 0$  **IA**  $x > 4$ , b)  $0 < x < 2$  **IA**  $2 < x < 4$ ;  
89)  $y' = -2 \cdot \frac{x + 2}{(x^2 + 4x + 6)^2}$ , a)  $x < -2$ , b)  $x > -2$ ;  
90)  $y' = -10 \cdot \frac{x}{(x - 3)^3}$ , a)  $0 < x < 3$ , b)  $x < 0$  **IA**  $x > 3$ ;  
91)  $y' = -24 \cdot \frac{x - 2}{(4x^2 - 16x + 15)^2}$ , a)  $x < \frac{3}{2}$  **IA**  $\frac{3}{2} < x < 2$ , b)  $2 < x < \frac{5}{2}$  **IA**  $x > \frac{5}{2}$ ;  
92)  $y' = 4 \cdot \frac{x + 2}{(x^2 + 4x + 3)^2}$ , a)  $-2 < x < -1$  **IA**  $x > -1$ , b)  $x < -3$  **IA**  $-3 < x < -2$ ;  
93)  $y' = \frac{-x^2 - 8x - 15}{(x^2 + 8x + 17)^2}$ , a)  $-5 < x < -3$ , b)  $x < -5$  **IA**  $x > -3$ ;  
94)  $y' = 2x - 6$ ,  $y'' = 2$ ,  $\min(3, -7)$ ; 95)  $y' = -6x + 3$ ,  $y'' = -6$ ,  $\max\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ ;  
96)  $y' = 6x^2 - 2x - 4$ ,  $y'' = 12x - 2$ ,  $\max\left(-\frac{2}{3}, \frac{17}{27}\right)$ ,  $\min(1, -4)$ ;  
97)  $y' = -3x^2 + 6x$ ,  $y'' = -6x + 6$ ,  $\max(2, 5)$ ,  $\min(0, 1)$ ;  
98)  $y' = 6 \cdot \frac{x^2 - 6x}{(x^2 - 6x + 18)^2}$ ,  $y'' = 12 \cdot \frac{-x^3 + 9x^2 - 54}{(x^2 - 6x + 18)^3}$ ,  $\max(0, 1)$ ,  $\min(6, -1)$ ;  
99)  $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 8x - 48}{(x + 4)^2}$ ,  $y'' = \frac{64}{(x + 4)^3}$ ,  $\max(-12, -9)$ ,  $\min(4, 7)$ ;  
100)  $y' = 4 \cdot \frac{x - 3}{(x^2 - 6x + 11)^2}$ ,  $y'' = 4 \cdot \frac{-3x^2 + 18x - 25}{(x^2 - 6x + 18)^3}$ ,  $\min(3, 2)$ ;

101)  $y' = \frac{-x-1}{(x-1)^3}$ ,  $y'' = 2 \cdot \frac{x+2}{(x-1)^4}$ ,  $\min \left( -1, \frac{11}{4} \right)$ ;

102)  $y' = -6 \cdot \frac{x}{(9x^2-1)^2}$ ,  $y'' = 6 \cdot \frac{27x^2+1}{(9x^2-1)^3}$ ,  $\max (0, -1)$ ;

103)  $y' = 2 \cdot \frac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2}$ ,  $y'' = 4 \cdot \frac{-x^3-3x^2+2}{(x^2+2x+2)^3}$ ,  $\max (-2, 3)$ ,  $\min (0, 1)$ ;

104)  $y' = 3 \cdot \frac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2}$ ,  $y'' = \frac{6}{(x-2)^3}$ ,  $\max (3, -8)$ ,  $\min (1, 4)$ ;

105)  $y' = 4 \cdot \frac{x-2}{(x^2-4x+7)^2}$ ,  $y'' = 12 \cdot \frac{-x^2+4x-3}{(x^2-4x+7)^3}$ ,  $\min \left( 2, \frac{1}{3} \right)$ ; 106)  $y'' = 6 \neq 0$ ;

119)  $y'' = 6x-6$ ,  $(1, -3)$ ; 120)  $y'' = -18x-18$ ,  $(-1, 1)$ ;

121)  $y'' = 12x^2-12x-24$ ,  $(2, 0)$ ,  $(-1, -3)$ ; 122)  $y'' = x^2+2x-8$ ,  $(2, -26)$ ,  $(-4, 12)$ ;

123)  $y'' = 96 \cdot \frac{-x^2+4}{(x^2+12)^3}$ ,  $(2, -2)$ ,  $(-2, -2)$ ; 124)  $y'' = 6 \cdot \frac{x+2}{(x+4)^4}$ ,  $(-2, 1)$ ;

125)  $y'' = 8 \cdot \frac{x^3-9x}{(x^2+3)^3}$ ,  $(0, 0)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(-3, -1)$ ; 126)  $y'' = 32 \cdot \frac{4x^3+3x}{(4x^2-1)^3}$ ,  $(0, 1)$ ;

127)  $y'' = 24 \cdot \frac{x^2+4x+3}{(x^2+4x+7)^3}$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(-3, 0)$ ; 128)  $y'' = 6 \cdot \frac{x-1}{(x+2)^4}$ ,  $\left( 1, -\frac{1}{3} \right)$ ;

129)  $y'' = 54 \cdot \frac{x^3-x}{(3x^2+1)^3}$ ,  $(0, -1)$ ,  $\left( 1, -\frac{1}{4} \right)$ ,  $\left( -1, -\frac{7}{4} \right)$ ; 130)  $y'' = 4 \cdot \frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$ ,  $(0, -3)$ ;

155)  $x = 1$ ; 156)  $x = -\frac{5}{2}$ ; 157)  $x = -\frac{1}{3}$ ; 158)  $x = 3$ ,  $x = -3$ ; 159)  $x = 2$ ,  $x = -2$ ;

160)  $x = 2$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ; 161)  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = -\frac{1}{3}$ ; 162)  $x = 0$ ,  $x = 3$ ,  $x = -3$ ;

163)  $x = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = -1$ ; 164)  $x = 0$ ; 165)  $x = -6$ ; 166)  $x = -2$ ; 167)  $x = 0$ ,  $x = 5$ ;

מס' השאלה	$y'(x)$	$y''(x)$	נקודות קיצון	נקודות פיתול	אסימפטוטות
192	$\frac{1}{2} \cdot \frac{4x^2 + 4x - 15}{(2x+1)^2}$	$\frac{32}{(2x+1)^3}$	$\max \left( -\frac{5}{2}, -\frac{9}{2} \right)$ $\min \left( \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right)$	/'א	$x = -\frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}$
193	$-3 \cdot \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$	$18 \cdot \frac{x^2+x}{(x^2+x+1)^3}$	$\max \left( -\frac{1}{2}, 3 \right)$	(0, 2) (-1, 2)	$y = -1$
194	$-12 \cdot \frac{x^2-3}{(x^2+3)^2}$	$24 \cdot \frac{x^3-9x}{(x^2+3)^3}$	$\max (1.7, 6.5)$ $\min (-1.7, -0.5)$	(0, 3) (3, 6) (-3, 0)	$y = 3$
195	$\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+4x+10}{(x+2)^2}$	$\frac{-6}{(x+2)^3}$	/'א	/'א	$x = -2$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
196	$5 \cdot \frac{-x-2}{(x^2+4x+3)^2}$	$5 \cdot \frac{3x^2+12x+13}{(x^2+4x+3)^3}$	$\max \left( -2, -\frac{9}{2} \right)$	/'א	$x = -1$ $x = -3$ $y = -2$
197	$3 \cdot \frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$	$-6 \cdot \frac{x^3+12x}{(x^2-4)^3}$	/'א	(0, 1)	$x = 2$ $x = -2$ $y = 1$
198	$\frac{x-2}{(x-1)^3}$	$\frac{-2x+5}{(x-1)^4}$	$\min \left( 2, -\frac{9}{2} \right)$	$\left( \frac{5}{2}, -\frac{40}{9} \right)$	$x = 1$ $y = -4$
199	$\frac{-4x^2+16x-37}{4(x-2)^2}$	$\frac{21}{2} \cdot \frac{1}{(x-2)^3}$	/'א	/'א	$x = 2$ $y = -x$

200	$\frac{12(2x-3)}{(4x^2-12x+5)^2}$	$\frac{-24 \cdot (12x^2-36x+31)}{(4x^2-12x+5)^3}$	$\min\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$	$/'\mathcal{K}$	$x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{5}{2}$ $y = -1$
201	$8 \cdot \frac{x^2-3}{(x^2+3)^2}$	$-16 \cdot \frac{x^3-9x}{(x^2+3)^3}$	$\max(-1.7, 4.3)$ $\min(1.7, -0.3)$	$(0, 2)$ $(3, 0)$ $(-3, 4)$	$y = 2$
202	$2 \cdot \frac{-x^2+3x}{(2x-3)^2}$	$\frac{-18}{(2x-3)^3}$	$\max(3, 1)$ $\min(0, 4)$	$/'\mathcal{K}$	$x = \frac{3}{2}$ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{4}$
203	$\frac{28(x+3)}{(x^2+6x+12)^2}$	$\frac{-84(x^2+6x+8)}{(x^2+6x+12)^3}$	$\min\left(-3, -\frac{8}{3}\right)$	$\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ $\left(-4, -\frac{3}{2}\right)$	$y = 2$
204	$2 \cdot \frac{-x+3}{(x+1)^3}$	$4 \cdot \frac{x-5}{(x+1)^4}$	$\max\left(3, \frac{9}{4}\right)$	$\left(5, \frac{20}{9}\right)$	$x = -1$ $y = 2$
205	$-7 \cdot \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$	$14 \cdot \frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$	$/'\mathcal{K}$	$\left(0, \frac{10}{3}\right)$	$x = 1$ $x = -1$ $y = \frac{10}{3}$
206	$\frac{x^4+9x^2}{(x^2+3)^2}$	$-6 \cdot \frac{x^3-9x}{(x^2+3)^3}$	$/'\mathcal{K}$	$(0, 0)$ $\left(3, \frac{9}{4}\right)$ $\left(-3, -\frac{9}{4}\right)$	$y = x$
207	$\frac{x^4-9x^2}{(x^2-3)^2}$	$6 \cdot \frac{x^3+9x}{(x^2-3)^3}$	$\max\left(-3, -\frac{9}{2}\right)$ $\min\left(3, \frac{9}{2}\right)$	$(0, 0)$	$x = 1.7$ $x = -1.7$ $y = x$





