שיעור 6

1) גבולות חד צדדיים

הגדרה (Cauchy)

1. פונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבה ימנית של נקודה x_0 $(x > x_0)$

גבול ימני של הפונקציה בנקודה x_0: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = L$

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x_0 < x < x_0 + \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$

2. פונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבה שמאלית של נקודה x_0 $(x < x_0)$

גבול שמאלי של הפונקציה בנקודה x_0: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = L$

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x_0 - \delta < x < x_0$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$

הערה 1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ אם ורק אם $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = L$ וגם $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = L$

הערה 2 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ו- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ אף הם נחשבים לגבולות חד צדדיים

תרגילים – חשב את הגבולות הבאים

1) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{x+2}{x}$ תשובה $+\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{x+2}{x}$ תשובה $-\infty$

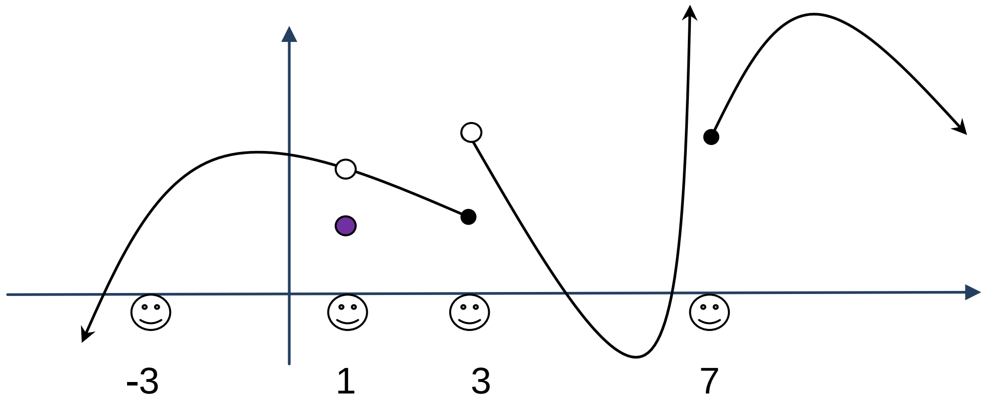
3) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{x-2}{x}$ תשובה $-\infty$

4) $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{x-2}{x}$ תשובה $+\infty$

5) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ תשובה 0

6) $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ תשובה 1

2) רציפות של פונקציה



פונקציה רציפה בנקודה $x=-3$:
$1)\ f(-3)=2 \quad \lim_{x\to -3-} f(x)=\lim_{x\to -3+} f(x)=2$

$x=1$ היא נקודת אי רציפות סליקה:
$2)\ f(1)=2 \quad \lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=3$

$3)\ f(3)=2 \quad \lim_{x\to 3-} f(x)=2\neq \lim_{x\to 3+} f(x)=4$
$x=3$ היא נקודת אי רציפות מסוג 1 (קפיצה סופית)

$4)\ f(7)=4 \quad \lim_{x\to 7-} f(x)=+\infty\neq \lim_{x\to 7+} f(x)=4$
$x=7$ היא נקודת אי רציפות מסוג 2 (קפיצה אינסופית)

הגדרות פונקציה $f(x)$ המוגדרת בסביבה של נקודה x_0

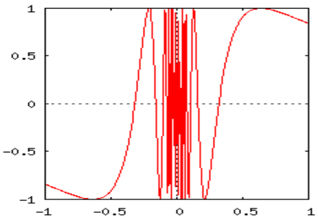
1. $f(x)$ נקראת **רציפה** בנקודה x_0 אם
א. קיים $\lim_{x\to x_0} f(x)$ סופי ב. $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2. נקודה x_0 נקראת נקודת ***אי* רציפות סליקה** של פונקציה $f(x)$ אם
א. קיים $\lim_{x\to x_0} f(x)$ סופי ב. $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ ($f(x_0)$ לא בהכרח מוגדר)

3. נקודה x_0 נקראת נקודת ***אי* רציפות מסוג 1** של פונקציה $f(x)$ אם
א. קיימים $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ ו- $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ סופיים ב. $\lim_{x\to x_0-} f(x)\neq \lim_{x\to x_0+} f(x)$

4. נקודה x_0 נקראת נקודת ***אי* רציפות מסוג 2** של פונקציה $f(x)$ אם
לפחות אחד מתוך $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ ו- $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ אינסופי או לא קיים

לדוגמא $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים לכן 0 היא נקודת אי רציפות מסוג 2 של $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$



תרגילים

7) עבור אילו הערכים של a,b,c פונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+ax^2+bx+c}{(x+1)^2}, & x\neq -1\\ -3, & x=-1\end{cases}$

תהיה רציפה בנקודה $x=-1$?

תשובה $a=0, b=-3, c=-2$

8) עבור אילו הערכים של a,b,c פונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-bx+8}{x^2-5x+6}, & x<2\\ c, & x=2\\ (x^2-3)^{\frac{a}{x^2-2x}}, & x>2\end{cases}$

תהיה רציפה בנקודה $x=2$?

תשובה $a=\ln\sqrt{2}, b=6, c=2$

9) עבור אילו הערכים של a,b פונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax-\sin bx}{x}, & x<0\\ 3a-4b-2, & x=0\\ \dfrac{1-\cos bx}{x^2}, & x>0\end{cases}$

תהיה רציפה בנקודה $x=0$?

תשובה $\begin{cases}a=4\\ b=2\end{cases}$ או $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=-1\end{cases}$

10) עבור אילו הערכים של a,b פונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{x}, & x<0\\ a+2b+6, & x=0\\ \dfrac{x}{\sqrt{4+bx}-2}, & x>0\end{cases}$

תהיה רציפה בנקודה $x=0$?

תשובה $\begin{cases}a=-4\\ b=-2\end{cases}$ או $\begin{cases}a=-8\\ b=-1\end{cases}$

הגדרות (המשך)

5. פונקציה $f(x)$ נקראת **רציפה בקטע פתוח** (a,b) או $a<x<b$
אם $f(x)$ רציפה בכל נקודה בקטע

6. פונקציה $f(x)$ נקראת **רציפה בקטע סגור** $[a,b]$ או $a\le x\le b$ אם
א. $f(x)$ רציפה בקטע פתוח (a,b)
ב. קיימים גבולות חד צדדיים סופיים $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$ ו- $\lim\limits_{x\to b-} f(x)=f(b)$

משפטי הרציפות

1. פונקציות אלמנטאריות רציפות בכל נקודה בה הן מוגדרות
2. אם $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות (בנקודה או תחום) אז
א. $cf(x),\ f(x)\cdot g(x),\ f(x)\pm g(x)$ רציפות
ב. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ רציפה בכל נקודה בה $g(x)\neq 0$
ג. $f(g(x))$ רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרות

3. (מקרה פרטי של משפט ערך הביניים של Cauchy)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ המקיימת $f(a)\cdot f(b)$

אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f(c)=0$

4. (משפט ערך הביניים של Cauchy)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$

אזי לכל ערך y_0 בין $f(a)$ ל- $f(b)$ קיימת נקודה $a<x_0<b$ כך ש- $f(x_0)=y_0$

תרגילים

11) הוכח כי למשוואות הבאות ישנו לפחות פתרון ממשי אחד בקטע $[a,b]$

$x^5-3x^2+6=0 \quad [-2,1]$

$\sqrt{x}=\dfrac{3}{x-1} \quad [-1,3]$

12) הוכח כי למשוואות הבאות ישנו לפחות 2 פתרונות ממשיים

$x^4-9x-1=0$

$e^x=x^2+6x+8$

$\sqrt{25-x^2}=\dfrac{6}{x}$

$arc\cot x=4-x^2$

3) משפטי ויירשטרס (חשובים לחקירת פונקציה בהמשך)

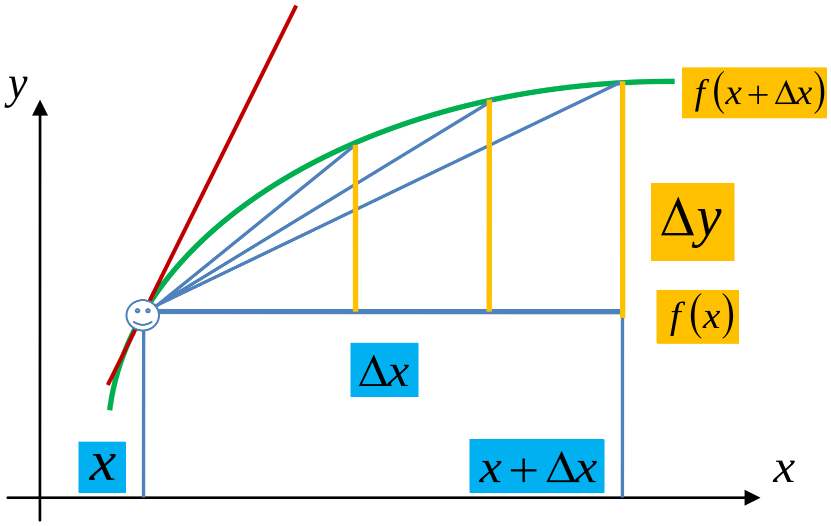
1) אם פונקציה f רציפה בקטע סגור $\left[a,b\right]$ אז היא חסומה בקטע הזה
2) אם פונקציה f רציפה בקטע סגור $\left[a,b\right]$ אז היא מקבלת בקטע את הערכים הגדול (מקסימום) והקטן (מינימום) שלה

משפטי ויירשטרס אינם בהכרח נכונים עבור פונקציות רציפות בקטעים שאינם סגורים

(לדוגמה, הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ רציפה בקטע $\left(0,1\right)$ אך אינה חסומה

פונקציה $g\left(x\right)=x$ חסומה בקטע $\left(0,1\right)$ אך אינה מקבלת בו מינימום או מקסימום)

4) שיפוע והגדרת הנגזרת של פונקציה



שיפוע $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

נגזרת $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

הגדרה

תהי $y = f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x = x_0$.

$f(x)$ נקראת גזירה בנקודה x_0 במידה וקיים גבול

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

הנקרא נגזרת של $f(x)$ בנקודה x_0 ומסומן $f'(x_0)$

תרגילים – חשב את הנגזרת של $f(x)$ בכל נקודה x בה $f(x)$ גזירה תוך שימוש בהגדרה

תוך שימוש בהגדרה	תשובות
1) $f(x) = x^2$	1) $f'(x) = 2x$
2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$	2) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
3) $f(x) = \sqrt{x}$	3) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4) $f(x) = e^x$	4) $f'(x) = e^x$
5) $f(x) = \sin x$	5) $f'(x) = \cos x$
6) $f(x) = \cos x$	6) $f'(x) = -\sin x$