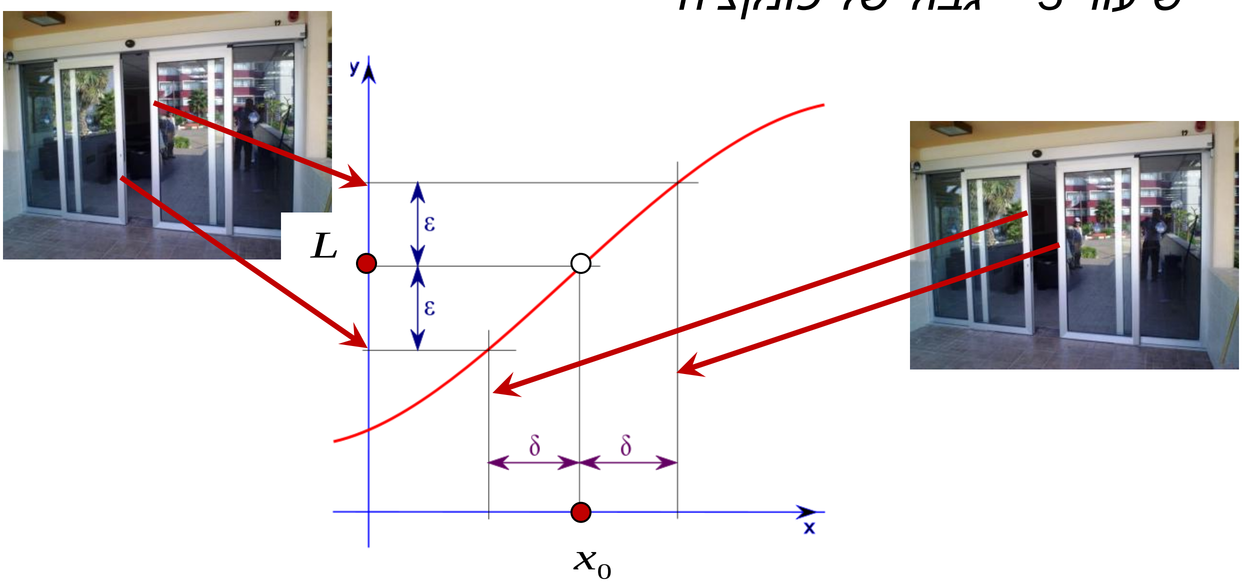
שיעור 5 – גבול של פונקציה



הגדרה (Cauchy)

פונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבה של נקודה x_0 פרט אולי לנקודה x_0 עצמה

גבול של הפונקציה בנקודה x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$

תרגיל הוכח ש- $\lim\limits_{x\to 2}(5x-7)=3$

תכנון הוכחה

רוצים לכל $\varepsilon>0$ להתאים את $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta$ יתקיים

$|f(x)-L|<\varepsilon$ כלומר $|5x-7-3|<\varepsilon$

לכן $|5x-10|<\varepsilon$

ולכן $|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}=\delta$

הוכחה

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta=\frac{\varepsilon}{5}>0$ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים

$|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}=\delta$ כלומר $|5x-10|<\varepsilon$ לכן $|f(x)-L|=|5x-7-3|<\varepsilon$ $\square$

משפטי גבולות

1. גבול של פונקציה הנו יחיד במידה וקיים
2. אם קיימים גבולות סופיים $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ו- $\lim_{x\to x_0} g(x)$ אז קיימים גבולות סופיים

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(cf(x)\right)=c\lim_{x\to x_0} f(x)$$

ובמידה ו- $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ קיים הגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

3. אם קיימים גבולות סופיים $\lim_{x\to x_0} g(x)=a$ ו- $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

אז קיים גבול $\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)=f(a)$

4. אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ פונקציה $g(x)$ חסומה בסביבה של נקודה x_0 אז

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=0$$

5. (כלל סנדוויץ') נתונות 3 פונקציות $f(x),g(x),h(x)$

אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=L$ ו- $f(x)\le g(x)\le h(x)$ לכל x בסיבה של x_0

אז גם $\lim_{x\to x_0} g(x)=L$ (L יכול להיות ערך סופי או אינסוף)

תרגיל הוכח את המשפטים 1-5 תוך שימוש בהגדרת Heine או Cauchy

6. (דירוג הפונקציות האלמנטאריות)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{c^x}=0\quad\left(a,c>1,b>0\right)$$

לדוגמא $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[100]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1000}}{1.00001^x}=0$

7. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=1\Leftarrow\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{f(x)}=1$ כאשר

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n\ \left(a_0\neq 0\right)$ - פולינום כלשהוא

חישוב גבולות של פונקציה במקרים שונים

1) גבולות וודאים $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{9-4}{9-2}=5$

2) אי וודאות מסוג $\left[\frac{0}{0}\right]$ - פירוק לגורמים וצמצום הגורם המאפס

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{10x^2+3x-46}{x^2+15x-34}=\frac{43}{19}\qquad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-18x-19}{7x^2-15x-22}=\frac{20}{29}\qquad \lim_{x\to 3}\frac{2x^2+7x-39}{3x^2-20x+33}=-\frac{19}{2}$$

3) אי וודאות מסוג $\left[\frac{0}{0}\right]$ עם שורשים – הכפלה ב"צמוד "

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-24x+48}{\sqrt{5x+5}-5}=0\qquad \lim_{x\to -7}\frac{\sqrt{5x+36}-1}{x^2-49}=-\frac{5}{28}$$

4) אי וודאות מסוג $[\infty-\infty]\Leftarrow$ מכנה משותף $\Rightarrow$ אי וודאות מסוג $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to -4}\left(\frac{2x+2}{x^2+6x+8}-\frac{x+13}{x^2+11x+28}\right)=\frac{7}{6}\qquad \lim_{x\to 5}\left(\frac{7x-26}{x^2-7x+10}-\frac{4x-17}{x^2-9x+20}\right)=\frac{1}{3}$$

5) אי וודאות מסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ בשאיפה לאינסוף – עקרון החזקה הגבוהה

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+...+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & n<m\\ \frac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n>m\end{cases}\qquad \begin{matrix}a_0\neq 0\\ b_0\neq 0\end{matrix}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5(x-1)(2x-3)-(3x+1)^2}{(4x-1)^2-3(x-4)(2x+5)}=\frac{1}{10}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3(2x+1)^2-8(x+2)^2-4(x-1)^2}{2(3x+5)-5(8x+1)}=\frac{6}{17}$$

6) אי וודאות מסוג $[\infty-\infty]$ ⇐ מכנה משותף ⇐ אי וודאות מסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x-1}-x\right)=3 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-2x+1}{2x+3}-2x\right)=-4$$

7) אי וודאות מסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ בשאיפה לאינסוף עם שורשים – עקרון החזקה השקולה (חשוב להבחין בין $\pm\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+3x-1}{5x+2}=\frac{4}{5} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+3x-1}{5x+2}=\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x^2+5x-4}-2x-1}{-3x+10}=-\frac{1}{3} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^2+5x-4}-2x-1}{-3x+10}=-\frac{7}{3}$$

8) אי וודאות מסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ עם שורשים – הכפלה ב"צמוד" (חשוב להבחין בין $\pm\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2-7x-1}-4x+3\right)=\frac{17}{8} \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2-7x-1}-4x+3\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+7x-2}-\sqrt{x^2-x+4}\right)=4 \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+7x-2}-\sqrt{x^2-x+4}\right)=-4$$

9) הגבול המופלא הראשון - אי וודאות מסוג $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}\quad(\beta\neq0)$$

זהויות

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

תרגילים

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x+8\sin x}{\sin7x-\sin4x}=\frac{13}{3} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos7x}{\cos4x-\cos14x}=\frac{2}{9} \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos10x}{\sin^2 6x-\sin^2 7x}$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos2x}{1+\sin x} \qquad \lim_{x\to\alpha}\frac{1-\cos(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$$

10) אי וודאות מסוג $\left[1^\infty\right]$ והגבול המופלא השני

אם $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$ אז $\lim_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$

תרגילים

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+1}\right)^{x+4}=e^{\frac{4}{3}} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+1}{x^2+x+3}\right)^{x+4}=e^4 \qquad \lim_{x\to-2}(3x+7)^{\frac{1}{x^2-4}}=e^{-\frac{3}{4}}$$

$$\lim_{x\to-2}\left(\sqrt{2x+53}-6\right)^{\frac{1}{3x^2+5x-2}}=e^{-\frac{1}{49}} \qquad \lim_{x\to-7}\left(\sqrt{x^2+15}-7\right)^{\frac{1}{2x^2+14x}}=e^{\frac{1}{16}}$$

11) שילוב בין 2 הגבולות המופלאים

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x+\sin 5x)^{\frac{1}{\sin x+\sin 4x}}=e^{\frac{8}{5}} \qquad \lim_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{\cos x-\cos 11x}}=e^{\frac{1}{8}}$$

12) גבולות הנגררים מגבול המופלא השני

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

תרגילים

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(5x-4)}{x^2-1}=\frac{5}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 7x}=\frac{25}{49}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

תרגיל

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos x}-e^{\cos 3x}}{4x^2-\pi^2}=-\frac{1}{\pi}$$