שיעור 4

משפט (כלל סנדוויץ')

נתונות 3 סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ וקיים n_0 כך ש- $a_n \le b_n \le c_n$ לכל $n \ge n_0$

אז גם $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

משפט (נובע מכלל הסנדוויץ')

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ והסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה אז $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

תרגיל - חשב את $\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan n}{n}$ (רמז - להגדיר $a_n = \frac{1}{n}$ ו- $b_n = \arctan n$)

משפטי השוואה

נתונות 2 סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ וקיים n_0 כך ש- $a_n \le b_n$ לכל $n \ge n_0$. אזי

א. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ אז גם $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

ב. אם $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

משפט (מבחני המנה והשורש)

נתונה סדרה חיובית $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (קיים n_0 כך ש- $a_n > 0$ לכל $n \ge n_0$)

אזי $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ומתקיים כי

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ במידה ו- $q < 1$

ו- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ במידה ו- $q > 1$

הערה – לא ניתן לדעת מהו $\lim_{n\to\infty} a_n$ במידה ו- $q = 1$

תרגיל- הראה תוך שימוש במבחן המנה כי

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1000}}{1.00001^n}=0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000^n}{n!}=0$

משפט *(דירוג הפונקציות האלמנטאריות)*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^b}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0\quad\left(a,c>1,b>0\right)$$

דוגמאות $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[100]{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1000}}{1.00001^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$

משפט אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ *ופונקציה* f *מוגדרת ורציפה בסביבה של נקודה* $x=L$

אז $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(a_n\right)=f\left(L\right)$

משפט $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ *(רמז להוכחה -* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ *)*

תרגיל

תוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^7-10n^6-25n-100}=1$ *תוך שימוש בכלל סנדוויץ' ובמשפט האחרון*

מסקנה – לכל פולינום $f\left(n\right)$ *מכל סדר* m *מתקיים (עפ"י כלל סנדוויץ')*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(n\right)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+...+a_1n+a_0}=1\quad\left(a_m>0\right)$$

תרגיל - חשב את

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+10^n}$ *(רמז* $\sqrt[n]{10^n}\le\sqrt[n]{3^n+10^n}\le\sqrt[n]{2\cdot10^n}$ *)*

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$ *(רמז* $\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}\le\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$ *)*

הגדרה

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים ו $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים. אזי הסדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ נקראת תת סדרה של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

דוגמאות

1) סדרה $\left\{\frac{1}{2},4,\frac{1}{8},16,...\right\} = \left\{2^{(-1)^n n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מכילה לפחות 2 תתי הסדרה שמתכנסות לגבולות שונים : $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{8},...\right\}$ $(n_k = 2k-1)$ ו- $\{4,16,...\}$ $(n_k = 2k)$

2) סדרה $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מכילה לפחות 9 תתי הסדרה שמתכנסות לגבולות שונים

משפט

אם סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת(כולל במובן הרחב) אז כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול

על סמך המשפט הזה הסדרה $\left\{2^{(-1)^n n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת מפני שיש לה 2 תתי סדרה המתכנסות כל אחת לגבול אחר. תת הסדרה $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{8},...\right\}$ מתכנסת ל- 0 ואילו תת הסדרה $\{4,16,...\}$ מתכנסת ל- $+\infty$

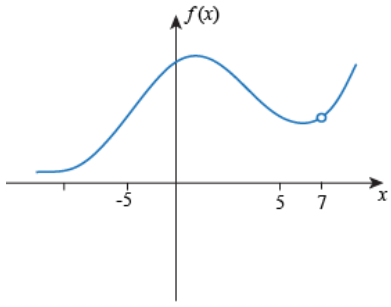
משפט בולצנו – ויירשטרס

לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת
(לכל סדרה יש תת סדרה המתכנסת במובן הרחב)

תרגיל 2 מצא תתי סדרה מתכנסות של הסדרה $\left\{\frac{n\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

רמז - להגדיר $n_k = 8k, 8k+1, 8k+2, 8k+3$

גבול של פונקציה



הגדרה (Heine)

פונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבה של נקודה x_0 פרט אולי לנקודה x_0 עצמה

גבול של הפונקציה בנקודה x_0 : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \neq x_0)$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$

__תרגיל 1__ הוכח שלא קיים גבול $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

הוכחה – נגדיר 2 סדרות : $\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\left\{\frac{1}{(2n+0.5)\pi}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+0.5)\pi}=0$$

אבל

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin(n\pi)=0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{(2n+0.5)\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin((2n+0.5)\pi)=1$$

$\square$

__תרגיל 2__ הוכח ש- $\lim\limits_{x\to 2}(5x-7)=3$

הוכחה - לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ עפ"י משפטי הסדרות מתקיים

$\lim\limits_{n\to\infty}(5x_n-7)=2$ ולכן $\lim\limits_{x\to 2}(5x-7)=3$ עפ"י הגדרת היינה

__תרגיל 3__ חשב את $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

פתרון - לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \neq 2)$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ עפ"י משפטי הסדרות

מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{{x_n}^2-4}{{x_n}^2-3x_n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x_n-2)(x_n+2)}{(x_n-2)(x_n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n+2}{x_n-1}=\frac{2+2}{2-1}=4$

ולכן עפ"י הגדרת היינה $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=4$