שיעור 3

הגדרה גבול של סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שווה - L $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L\right)$

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$

במידה ולסדרה קיים גבול סופי L אומרים כי הסדרה מתכנסת ל- L , אחרת אומרים כי הסדרה מתבדרת(שואפת לאינסוף או לא שואפת לאף גבול)

הגדרה הפוכה גבול של סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שונה מ- L $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq L\right)$

אם קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל n_0 קיים $n > n_0$ כך ש- $|a_n - L| \geq \varepsilon$

<u>תרגיל</u>

הוכח ש- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+7}{n+3} \neq 6$

תכנון הוכחה

רוצים למצוא $\varepsilon > 0$ כך שלכל n_0 יימצא $n > n_0$ כך ש- $|a_n - L| > \varepsilon$

כלומר

$$\left|\frac{5n+7}{n+3} - 6\right| > \varepsilon$$

$$\left|\frac{5n+7-6n-18}{n+3}\right| > \varepsilon$$

$$\left|\frac{-n-11}{n+3}\right| = \frac{n+11}{n+3} = 1 + \frac{8}{n+3} > \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 1$$

הוכחה

קיים $\varepsilon = 1$ כך שלכל n_0 יימצא $n > n_0$ כך ש-

$$\left|\frac{-n-11}{n+3}\right| = \frac{n+11}{n+3} = 1 + \frac{8}{n+3} > \varepsilon = 1$$

לכן

$$\left|\frac{5n+7-6n-18}{n+3}\right| > \varepsilon$$

ולכן

$$\left|\frac{5n+7}{n+3} - 6\right| > \varepsilon$$

כלומר $|a_n - L| > \varepsilon$ הוכחנו את הטענה $\square$

הגדרה גבול של סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ אם לכל $M>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n > M$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ אם לכל $M>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n < -M$

כאשר $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ או $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ או $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ אומרים כי הסדרה מתכנסת במובן הרחב

תרגיל

הוכח ש- $\lim\limits_{n\to\infty}(5n+7) = +\infty$

תכנון הוכחה

רוצים לכל $M>0$ להתאים את n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n = 5n+7 > M$

לכן $n > \frac{M-7}{5} \Rightarrow n_0 = \left[\frac{M-7}{5}\right]+1$

הוכחה

לכל $M>0$ קיים $n_0 = \left[\frac{M-7}{5}\right]+1$ (ניתן להניח כי $M>7$ ולכן $n_0 \in \mathbf{N}$)

כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $n > \frac{M-7}{5} \Rightarrow 5n+7 = a_n > M$ $\square$ (הוכחנו)

משפטי סדרות

1. לכל סדרה מתכנסת קיים גבול יחיד $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

2. לכל 2 סדרות מתכנסת $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(ka_n) = k\cdot\lim_{n\to\infty} a_n \quad (k\in\mathbf{R})$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n / \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ במידה ו- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

חישוב גבולות במצבי אי וודאות שונים

1. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ – עקרון החזקה הגבוהה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+\ldots+a_{p-1}n+a_p}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+b_2n^{m-2}+\ldots+b_{m-1}n+b_m}=\begin{cases}0, & p<m\\ \frac{a_0}{b_0}, & p=m\\ \infty, & p>m\left(\frac{a_0}{b_0}>0\Rightarrow+\infty,\frac{a_0}{b_0}<0\Rightarrow-\infty\right)\end{cases}\qquad a_0\neq 0,\ b_0\neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3-8n^2+2n-4}{5n^3+6n^2+6n-2}=-\frac{2}{5}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3-8n^2+2n-4}{5n^4+6n^2+6n-2}=0\quad \lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3-8n^2+2n-4}{5n^2+6n-2}=+\infty$$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ עם שורשים – עקרון החזקה השקולה הגבוהה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{81n^4+7n^3+2n^2-5n+10}+\sqrt[3]{64n^3-4n^2+5n-1}-15n+4}{\sqrt{36n^2-3n+1}-9n+2}\left(\frac{/n}{/n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{81+7n^{-1}+2n^{-2}-5n^{-3}+10n^{-4}}+\sqrt[3]{64-4n^{-1}+5n^{-2}-n^{-3}}-15+4n^{-1}}{\sqrt{36-3n^{-1}+n^{-2}}-9+2n^{-1}}=\frac{3+4-15}{6-9}=\frac{8}{3}$$

2. $[\infty-\infty]$ ההופכת ל- $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ באמצעות מכנה משותף

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n-1}-n\right)=3\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-4}{n-5}-2n\right)=11\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-2n+1}{2n+3}-2n\right)=-4$$

$[\infty-\infty]$ ההופכת ל- $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ באמצעות הכפלה ב"צמוד"

$$\lim_{n\to\infty}[\sqrt{16n^2-7n-1}-4n+3]=\frac{17}{8}\qquad \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+7n-2}-\sqrt{n^2-n+4})=4$$

3. מספר $e\approx 2.71828182845904590...$ ואי וודאות מסוג $\left[1^{\infty}\right]$

משפט

כל סדרה מונוטונית חסומה מתכנסת

מקרה 1 - סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה מתכנסת לגבול העליון שלה

מקרה 2 - סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה מתכנסת לגבול התחתון שלה

הגדרה $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ (ניתן להוכיח כי הסדרה מונוטונית עולה וחסומה)

משפט

אם $\lim_{n\to\infty}\alpha(n)=\infty$, אז $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(n)}\right)^{\alpha(n)}=e$

אם $\lim_{n\to\infty}\alpha(n)=0$, אז $\lim_{n\to\infty}\left(1+\alpha(n)\right)^{\frac{1}{\alpha(n)}}=e$

תרגיל – חשב את הגבולות הבאים תוך שימוש במשפט

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n+1}{6n-3}\right)^{4n+7}=e^{\frac{8}{3}} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-7}{5n+1}\right)^{2n-3}=e^{-\frac{16}{5}} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{n+4}=e^{\frac{4}{3}}$$

משפט

כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב

מקרה 1 - סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה מתכנסת לגבול העליון שלה
מקרה 2 - סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה מתכנסת לגבול התחתון שלה
מקרה 3 - סדרה מונוטונית עולה שאינה חסומה מלמעלה מתכנסת ל- $+\infty$
מקרה 4 - סדרה מונוטונית יורדת שאינה חסומה מלמטה מתכנסת ל- $-\infty$

מציאת גבול לסדרות המוגדרת על ידי כלל הנסיגה

תרגילים

1) הסדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ ונתון כי $a_1=\sqrt{2}$
הוכח שהסדרה מתכנסת ומצא את גבולה
פתרון

שלב 1 - נחשב מספר איברים ראשונים של הסדרה $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},...$
שלב 2 – נוכיח באינדוקציה כי הסדרה מונוטונית עולה $(a_{n+1}\geq a_n)$ לכל n טבעי
שלב 3 – נוכיח באינדוקציה כי הסדרה חסומה מלמעלה $(a_n\leq 2)$ לכל n טבעי
שלב 4 – על סמך המשפט " כל סדרה מונוטונית חסומה מתכנסת" ניתן לרשום

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=L\Rightarrow L=\sqrt{L+2}\Rightarrow L^2-L-2=0\Rightarrow L=2\left(L\geq\sqrt{2}\right)$$

2) הסדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{6a_n}$ ונתון כי $a_1=\sqrt{6}$
הוכח שהסדרה מתכנסת ומצא את גבולה
פתרון

שלב 1 - נחשב מספר איברים ראשונים של הסדרה $\sqrt{6},\sqrt{6\sqrt{6}},\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}},...$
שלב 2 – נוכיח באינדוקציה כי הסדרה מונוטונית עולה $(a_{n+1}\geq a_n)$ לכל n טבעי
שלב 3 – נוכיח באינדוקציה כי הסדרה חסומה מלמעלה $(a_n\leq 6)$ לכל n טבעי
שלב 4 – על סמך המשפט " כל סדרה מונוטונית חסומה מתכנסת" ניתן לרשום

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=L\Rightarrow L=\sqrt{6L}\Rightarrow L^2-6L=0\Rightarrow L=6\left(L\geq\sqrt{6}\right)$$

3) הסדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$ ונתון כי $a_1=\sqrt{3}$
הוכח שהסדרה מתכנסת ומצא את גבולה

4) הסדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$ ונתון כי $a_1=\sqrt{3}$
הוכח שהסדרה מתכנסת ומצא את גבולה

5) הסדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{5+a_n}$ ונתון כי $a_1=\sqrt{5}$
הוכח שהסדרה מתכנסת ומצא את גבולה

6) הסדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{5a_n}$ ונתון כי $a_1=\sqrt{5}$
הוכח שהסדרה מתכנסת ומצא את גבולה