

אוניברסיטת בן גוריון בנגב-המחלקה למתמטיקה
 חדווא להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) סמסטר א תשע"ו
 תרגיל 3

1. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{2n-3} = \frac{3}{2}$ מצאו n_0 שהל ממנו מתקיים $\left| \frac{3n+4}{2n-3} - \frac{3}{2} \right| < 0.001$

2. הוכחו לפי הגדרת הגבול:

(א) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$ (ב) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \cos(n^2) = 0$

3. נתונה סדרה $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots$. כל האיברים של הסדרה החל מהאיבר החמישי נמצאים בתוך סביבה של אפס בין $(-1, 1)$. למה למרות זאת, מכאן לא נובע שאפס הוא הגבול של הסדרה?

4. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 7n + 4}{2n^3 + n + 1}$ (ב) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n^2 - 3}$ (ג) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - n + 8}{2n^2 + n + 17}$

(ד) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - 3n - 3} - \sqrt{n^2 + 3n - 3}$ (ה) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2n+4} - \sqrt[3]{2n}$ (ו) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$

(ז) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)^{100}}{4^n}$ (ח) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 \arccos\left(\frac{1}{n}\right) + n^2 \sin n}{7n^4 + 3n^2 + 5}$ (ט) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5 + \sqrt[4]{n}}$

(י) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n}}$ (יא) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

5. תן דוגמא של סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ומתקיים
 (א) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - a_n = 0$ (ב) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - a_n = \infty$ (ג) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - a_n$ לא קיים.

6. הוכיחו שהסדרה הבאה מתכנסת וחשבו את הגבולה.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

7. נתונה סדרה $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $a_1 = 1$. הוכיחו שהסדרה מונוטונית עולה. האם היא חסומה? האם הסדרה מתכנסת?

8. לכל אחת מהסדרות הבאות, בדקו האם קיימת תת סדרה מתכנסת? חשבו את כל הגבולות החלקים.

(א) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$ (ב) $a_n = 1 + \frac{n+1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$