אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) - סמסטר א' תשע"ד
פתרון תרגיל 2

1. מצאו את התמונה של הפונקציות הבאות:

(א) $f:[-2,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+2$. לפונקציה זו אין שורשים ממשיים. נראה כי $f(x)\geq 1$ וכי הערך 1 מתקבל בתחום הנתון:
$f(x)\geq 1 \iff x^2-2x+2\geq 1 \iff x^2-2x+1\geq 0 \iff (x-1)^2\geq 0$ וזה כמובן מתקיים. בנוסף, קל לראות שהערך 1 הוא הערך המינימלי שהפונקציה יכולה לקבל, ושערך זה מתקבל בנקודה 1 שנמצאת בתחום הנתון. הערך המקסימלי של הפונקציה מתקבל באחד הקצוות. מהצבה נקבל ש $f(-2)=10, f(3)=5$ זאת אומרת שהערך המקסימלי שהפונקציה מקבלת בקטע הוא 10. היות שגרף הפונקציה הוא קו רציף, נובע שהפונקציה מקבלת כל ערך בין 1 ל־10, ולכן התמונה שלה היא $[1,10]$.

(ב) $f:[-5,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-200x+7$. יהיו $-5\leq x_1<x_2\leq 5$. אזי
$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2-200(x_2-x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1-200)<0$. לכן הפונקציה f היא מונוטונית יורדת ממש בתחום הנתון. לכן הערך המקסימלי שלה מתקבל בקצה הימני, והערך המינימלי שלה מתקבל בקצה הימני. ע"י הצבה, נקבל שהתמונה היא $[-968,1032]$.

(ג) $f:\{3,4,5\}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=x^3+2$. ע"י הצבת שלושת איברי התחום בפונקציה, נקבל שהתמונה היא $\{29,66,127\}$.

2. בכל אחד מהסעיפים הבאים, רישמו ביטוי מפושט עבור הפונקציות $f\circ g$ ו־ $g\circ f$, וכן את תחומי ההגדרה הטבעיים של $f,g,f\circ g,g\circ f$: נסמן $F(x)=f(g(x)), G(x)=g(f(x))$, ונסמן ב־ D_f את תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציה f.

(א) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$
$D_f=[0,\infty), D_g=\mathbb{R}, F(x)=|x|, D_F=\mathbb{R}, G(x)=x, D_G=[0,\infty)$.

(ב) $f(x)=\log_4(x)$, $g(x)=2^x$
$D_f=[0,\infty), D_g=\mathbb{R}, F(x)=\frac{x}{2}, D_F=\mathbb{R}, G(x)=\sqrt{x}, D_G=[0,\infty)$.

(ג) $f(x)=\log_{10}(x)$, $g(x)=x^2$
$D_f=[0,\infty), D_g=\mathbb{R}, F(x)=2\log_{10}|x|, D_F=\mathbb{R}\backslash\{0\}, G(x)=\log_{10}^2 x, D_G=(0,\infty)$.

(ד) $f(x)=\sin(5x+1)$, $g(x)=\arcsin(x)$
$D_f=\mathbb{R}, D_g=[-1,1], F(x)=\sin(5\arcsin(x)+1), D_F=[-1,1],$

$$G(x)=\arcsin(\sin(5x+1))=\begin{cases}5x+1+2\pi k, & -\frac{\pi}{10}-\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{5}\leq x\leq\frac{\pi}{10}-\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{5}\\(2k+1)\pi-(5x+1), & \frac{\pi}{10}-\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{5}\leq x\leq\frac{3\pi}{10}-\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{5}\end{cases}$$

עבור k שלם.

הסבר: לכל x, נסמן $y=5x+1$. הפונקציה $arcsin$ הופכית ל־sin רק בקטע $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
לכן, צריך למצוא נקודה a בקטע זה, או בקטע $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ כך ש־ $y-2\pi k$ נמצא באחד הקטעים הללו. ואז, מממחזוריות פונקציית הסינוס, נובע ש $\sin a=\sin y$.
אם $a\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ אז $arcsin(\sin y)=arcsin(\sin a)=a$
ואם $a\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ אז $arcsin(\sin y)=arcsin(\sin a)=arcsin(\sin(\pi-a))=\pi-a$ כאשר השיוויון האמצעי נובע מסימטריה של פונקצית הסינוס ביחס לישר $x=\frac{\pi}{2}$.
כעת נותר לבודד את x. למשל, במקרה ש $a=y-2\pi k=5x+1-2\pi k\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ נבודד את x ונקבל ש $-\frac{\pi}{10}-\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{5}\leq x\leq\frac{\pi}{10}-\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{5}$ ואז $arcsin(\sin(5x+1))=5x+1+2\pi k$.
המקרה השני דומה.
$D_G=\mathbb{R}$.

(ה) $f(x)=\arcsin(x)$, $g(x)=\cos(x)$

$D_f=[-1,1], D_g=\mathbb{R}$,

$F(x)=\arcsin(\cos(x))=\arcsin(\sin(x+\frac{\pi}{2}))=\{\begin{matrix}\frac{\pi}{2}-x+2\pi k, & 0+2\pi k\le x\le \pi+2\pi k\\ -(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}+x, & \pi+2\pi k\le x\le 2\pi+2\pi k\end{matrix}$

עבור k שלם.

$D_F=\mathbb{R}$.

$G(x)=\sqrt{1-x^2}, D_G=[-1,1]$.

3. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות בדקו אם הפונקציה חד־חד ערכית בתחום הגדרתה. במידה וכן, מצאו את הפונקציה ההופכית ואת תחום הגדרתה, שיסומן ב־D:

(א) $f(x)=-x^2, x\ge 0,$

$y=f(x)=-x^2\iff x=\sqrt{-y}$ ולכן $f^{-1}(x)=\sqrt{-x}, D=(-\infty,0]$.

(ב) $f(x)=\sqrt{1-x^2}, 0\le x\le 1,$

$y=f(x)=\sqrt{1-x^2}\iff x=\sqrt{1-y^2}$ ולכן $f^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}, D=[0,1]$.

(ג) $f(x)=x^3+1,$

$y=f(x)=x^3+1\iff x=\sqrt[3]{y-1}$ ולכן $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}, D=\mathbb{R}$.

(ד) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, x\in\mathbb{R},$

$f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2}), D=\mathbb{R}.$

(ה) $f(x)=\cos(x), -3\pi\le x\le -2.5\pi,$

$f^{-1}(x)=2\pi-\arccos x, D=[-1,0].$

(ו) $f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}x^2)$, $0\le x\le\sqrt{5}$ לא חח"ע.

4. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבעו האם הפונקציה היא מונוטונית עולה, מונוטונית יורדת, מונוטונית עולה ממש, מונוטונית יורדת ממש, או שאינה מונוטונית:

(א) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$ לא מונוטונית, כי $f(-1)>f(0)<f(1)$.

(ב) $f:[0,\infty)\to[0,\infty), f(x)=x^2$

מונוטונית עולה ממש, כי אם $0\le x_1<x_2$ אז

$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$ היות שזו מכפלת מספרים חיוביים.

(ג) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin(x)$ לא מונוטונית, כי $f(0)<f(\frac{\pi}{2})>f(\pi)$.

(ד) $f:(-2,\infty)\to(0,\infty), f(x)=\frac{1}{2x+4}$

מונוטונית יורדת ממש, כי אם $-2\le x_1<x_2$ אז

$f(x_2)-x(x_1)=\frac{1}{2x_2+4}-\frac{1}{2x_1+4}=\frac{2(x_1-x_2)}{(2x_2+4)(2x_1+4)}<0$.

הערה: ניתן להוכיח כי אם f פונקציה עולה ו $f(x)\neq 0$ לכל $x\in D$, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ היא מונוטונית יורדת בתחום D.

(ה) $f:[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\sin(x)}$

מונוטונית עולה ממש, כי סינוס עולה בתחום זה, ולכן אם $0\le x_1<x_2\le\frac{\pi}{2}$ אז

$0\le\sin(x_1)<\sin(x_2)$ והיות שפונקציית השורש היא פונקציה עולה, נקבל ש $f(x_1)<f(x_2)$.

(ו) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\lfloor x\rfloor$ פונקציה זו נקראת "פונקציית הערך השלם", והיא מתאימה לכל מספר ממשי את המספר השלם המקסימלי הקטן או שווה לו.

מונוטונית עולה: אם $x_1<x_2$ אז מהגדרה, השלם המקסימלי הקטן או שווה ל x_1 הוא קטן או שווה לשלם המקסימלי הקטן או שווה x_2. נשים לב שפונקציה זו אינה עולה ממש, כי למשל $\lfloor 1\rfloor=1=\lfloor 1.5\rfloor$.

5. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבעו האם הפונקציה מחזורית, ואם כן, חשבו את המחזור שלה.

(א) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$ לא מחזורית, כי בחלק החיובי, ככל ש־x גדל ערך הפונקציה גדל.

(ב) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin(3x)$ מחזורית, עם מחזור $T=\frac{2\pi}{3}$.

(ג) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos(\frac{x}{4})$ מחזורית, עם מחזור $T=8\pi$.

(ד) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin(3x)+\cos(\frac{x}{4})$ מחזורית, עם מחזור $T=8\pi$.

(ה) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\lfloor x\rfloor$ לא מחזורית, כי ככל ש־x גדל ערך הפונקציה גדל.

(ו) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\lfloor x\rfloor-x$ מחזורית, עם מחזור $T=1$.

6. הוכיחו באינדוקציה את הטענה הבאה: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מחזורית בעלת מחזור T, אז לכל מספר טבעי n ולכל x ממשי מתקיים $f(x+nT)=f(x)$. נוכיח את הטענה באינדוקציה על n. יהי x ממשי כלשהו. עבור $n=1$ מתקיים $f(x+T)=f(x)$, ע"פ ההנחה ש־f מחזורית בעלת מחזור T. נניח ל־$n-1$ ונוכיח ל־n: $f(x+nT)=f((x+(n-1)T)+T)=f(x+(n-1)T)=f(x)$, כאשר השיוויון השני נובע מכך ש־f מחזורית בעלת מחזור T, והשיוויון השלישי נובע מהנחת האינדוקציה.

7. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרה המתכנסת ל־ 1. הוכיחו שקיים N כך שלכל $n\geq N$ מתקיים כי $a_n<4$.

מכך שהסדרה מתכנסת ל־1, נובע שלכל $\epsilon>0$ קיים N טבעי, כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-1|<\epsilon$. בפרט, אם ניקח $\epsilon=3$ נקבל שקיים N טבעי, כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-1|<3$, כלומר $-2<a_n<4$ כנדרש.

8. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+23n^2-2008n+3}{5n^3+n^2+2}=\frac{2}{5}$ וזה מתקבל ע"י כך שנכפיל את המונה והמכנה ב־ $\frac{1}{n^3}$ ונשתמש באריתמטיקה של גבולות ובעובדה ש $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(ב) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+10}{n^2-2008n-1}=1$