

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) - סמסטר א' תשע"ד
תרגיל 1 - פתרונות

1. (א) $-\cos(x)$
 (ב) $-\sin(x)$
 (ג) $-\sin(x)$
 (ד) $-\sin(x)$ כאשר $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

2. (ג) נוכיח באינדוקציה שלכל $n > 1$ מתקיים כי $n! < \frac{(n+1)^n}{2}$. בסיס האינדוקציה: כאשר $n = 2$, $2 = 2! < \frac{3^2}{2}$. הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $n > 1$ מסויים, נוכיח עבור $n + 1$, כלומר נוכיח כי $(n + 1)! < \frac{(n+2)^{n+1}}{2}$.

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n! \stackrel{\text{הנחת האינדוקציה}}{<} (n + 1) \cdot \frac{(n + 1)^n}{2} = \frac{(n + 1)^{n+1}}{2} < \frac{(n + 2)^{n+1}}{2}$$

וזה מוכיח את הטענה.

(ד) נוכיח באינדוקציה שלכל $n > 1$ מתקיים כי $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. בסיס האינדוקציה: כאשר $n = 2$, $2 = 2! < \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $n > 1$ מסויים, נוכיח עבור $n + 1$, כלומר נוכיח כי $(n + 1)! < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$. קודם כל, נובע משאלה מס' 2 סעיף א' (שנקרא אי-שויון ברנולי) כאשר $x = \frac{1}{n+1}$ שמתקיים כי

$$(1) \quad \left(\frac{n + 2}{n + 1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^{n+1} > 1 + (n + 1) \cdot \frac{1}{n + 1} = 2.$$

אזי

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n! \stackrel{\text{הנחת האינדוקציה}}{<} (n + 1) \cdot \left(\frac{n + 1}{2}\right)^n = \frac{(n + 1)^{n+1}}{2^n}$$

ונובע מהאי-שויון (1) לעיל כי

$$\frac{(n + 1)^{n+1}}{2^n} = \frac{(n + 2)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}} < \frac{(n + 2)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

לכן $(n + 1)! < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$ והטענה הוכח.

3. -

4. (א) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
 (ב) $[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}]$
 (ג) $(-2.3, -1.7)$
 (ד) $(-\infty, -5) \cup (15, \infty)$
 (ה) $(-\infty, -\frac{1}{2})$
 (ו) $[-5, 5]$
5. (א) $[-2, 2]$
 (ב) $(-\infty, 0]$
 (ג) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
 (ד) $\{x \in [-1, \infty) \mid x \neq \pi k, \forall k \in \mathbb{Z}\}$
 (ה) $(-1, \infty)$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} [4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2] \quad (\text{ו})$$

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad (\text{ז})$$

6. (א) אי זוגית

(ב) זוגית

(ג) לא זוגי ולא אי זוגי

(ד) אי זוגי

(ה) זוגי

(ו) אי זוגי

(ז) לא זוגי ולא אי זוגי

7. הרכבה- זוגית

כפל- אי זוגי

$g(x)^2$ זוגית

8. (א) $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$

(ב) $-1 \leq y \leq 1$