חדו"א 1, 104003

פרופ' י. בנימיני

חורף תשע"ב

זו גירסא מעודכנת של "ספר הקורס". אין ספק שיש ברשימות שגיאות רבות, שגיאות דפוס, אי־בהירויות ואפילו טעויות מתמטיות. תודתי נתונה מראש לכל מי שיעביר אלי הערות ותיקונים מכל סוג.

במקומות מסויימים מסומן בשולי הדף הזמן המשוער שבו אנו אמורים להגיע לאותו מקום. אלה רק זמנים משוערים ותיתכנה סטיות מהם.

חומר שהמורה האחראי יכול להחליט לדלג עליו (ושלא יכלל אז בבחינה) מופיע באותיות קטנות עם הערה מתאימה בשולי הדף.

אני מודה לעופר מרמור שעזר בהדפסה ובעריכה של הרשימות.

תוכן עניינים

פרק 1

מבוא

1.1 הקדמה

אחד המושגים הבסיסיים והמרכזיים בהם נעסוק בקורס זה הינו ה"נגזרת" וכאן נדון, כמוטיבציה לקורס, במושג הנגזרת ובשימושיה באופן אינטואיטיבי.

נזכיר תחילה כי השיפוע של ישר במישור העובר דרך שתי נקודות (a_1, b_1) ו־(a_2, b_2) הוא $\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$ (לשרטט!). משוואת הישר העובר דרך הנקודה (a, b) ששיפועו הוא m היא $y = m(x-a) + b$.

הנגזרת של הפונקציה f בנקודה a היא הגבול $\lim\limits_{t \to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ (או, באופן שקול, הגבול $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$). באופן גיאומטרי אינטואיטיבי, הנגזרת בנקודה a היא השיפוע של המשיק לגרף של הפונקציה באותה הנקודה. באופן כזה נוסחת הישר המשיק היא $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

דרך אחרת להבין את הנגזרת של f בנקודה a היא כשינוי של הערך של f מערכה בנקודה a <u>ליחידה של x</u> (ונסתכל עליה כעל "קצב השינוי" של f בנקודה a).

נגזרות מופיעות באופן טבעי בכל ענפי המדע הכמותיים. חוקי הטבע (או הכלכלה, או כל ענף כמותי אחר) מטפלים בשינויים שעוברים גדלים מסויימים ־ ובקצב השינוי שלהם. הנה שלוש דוגמאות בסיסיות כאלה, מפיסיקה, כלכלה ומתמטיקה שבהן הנגזרת מופיעה באופן טבעי כזה.

<u>מהירות רגעית</u>

חלקיק נע בקו ישר על ציר המספרים הממשי, כאשר מהירותו איננה קבועה. נסמן ב־$S(t)$ את המיקום של החלקיק בזמן t. ($S(t)$ חיובי אם החלקיק נמצא ימינה מהראשית, ושלילי אם הוא שמאלה ממנה). ההפרש $S(t) - S(a)$ הוא ההעתק (כלומר המרחק, עם הסימן המתאים) שעבר החלקיק בין זמן a לזמן t. המנה $\frac{S(t)-S(a)}{t-a}$ היא המהירות הממוצעת של החלקיק בפרק זמן זה. אם נקח פרק זמן קצר מאוד (כלומר, t "קרוב" ל־ a), המהירות הממוצעת תהיה קרובה למהירות בה נע החלקיק בזמן a עצמו, ומידת הקירוב תהיה טובה יותר ככל ש־ t מתקרב ל־ a. באופן מתמטי אנו מקבלים כי הנגזרת של הפונקציה $S(t)$, כלומר הגבול $\lim\limits_{t \to a} \frac{S(t)-S(a)}{t-a}$, מתאר את ה"מהירות הרגעית" של החלקיק בזמן a.

נשים לב כי לכל הגדלים יש "יחידות". יחידות אורך להעתק S, יחידות זמן ל־ t, והמהירות נמדדת ביחידות שהן $\frac{\text{אורך}}{\text{זמן}}$.

<u>עלות שולית</u>

בכלכלה נהוג להשתמש במונח "שולי" במקום במונח "נגזרת". לדוגמא, נניח ש־ $f(x)$ מתארת את עלות הייצור של x יחידות של מוצר מסויים. ההפרש $f(a+h)-f(a)$ הוא העלות של ייצור h היחידות הנוספות, כאשר מעלים את רמת הייצור מ־ a ל־ $a+h$. המנה $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ מתארת את העלות הממוצעת של ייצור יחידה אחת כשמעלים את רמת הייצור מ־ a ל־ $a+h$. הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ הוא ה"עלות השולית", כלומר העלות של יחידת מוצר, כשנמצאים ברמת ייצור של a יחידות.

<u>חקירת פונקציה</u>

מבחינה גיאומטרית הנגזרת של הפונקציה f בנקודה a מתארת את השיפוע של המשיק לגרף של f בנקודה a. האינטואיציה אומרת שכאשר הנגזרת חיובית בקטע מסויים הפונקציה עולה בו, וכשהיא שלילית הפונקציה יורדת. בנקודות שבהן הפונקציה מקבלת מינימום או מכסימום המשיק צריך להיות מקביל לציר ה־ x־ים, כלומר הנגזרת שם שווה לאפס. זיהוי תחומי עלייה וירידה של פונקציה, או מציאת נקודות המכסימום ומינימום של פונקציה - בהקשר מתמטי או מעשי, הינם, כמובן חשובים ביותר: חשוב, למשל, לדעת לתכנן מתי מגיעים ל"מיצוי מכסימלי" של פוטנציאל הרווח בתהליך כלכלי שבו אנחנו רוצים לקחת חלק.

1.2 מטרת הקורס:

לפתח את התורה המתמטית של נגזרות, של אינטגרלים ושל כמה נושאים נוספים המהווים (ביחד עם החומר שתלמדו בקורסי היסוד המתמטיים האחרים) את התשתית המתמטית הדרושה להבנה ולפיתוח של ענפי המדע והטכנולוגיה, ושבה תשתמשו בהמשך לימודיכם.

המושג הבסיסי שעליו מתבססים כל הנושאים שנלמד בקורס זה הוא מושג הגבול, ואנחנו נשקיע זמן רב בתחילת הקורס לפיתוחו ולהבנה מעמיקה שלו. לשם כך נפתח שפה, דרכי מחשבה וטכניקות שישמשו אותנו גם בשאר הנושאים שנלמד.

מטרה חשובה אחרת היא לימוד השפה המתמטית ודרך ההצגה של חומר מתמטי. אלה חשובים לא פחות מפרט זה או אחר בחומר הנלמד. בדר"כ נשלב בין הבנת הרעיון והאינטואיציה לבין הגדרות והוכחות מדוייקים.

פרק 2

מושגי יסוד

2.1 סימונים ומושגי יסוד

קבוצות מספרים

בקורס זה נעסוק רק בקבוצות של מספרים ממשיים. אנו מסמנים קבוצה ע"י $\{\ \}$. לפעמים ניתן לכתוב באופן מפורש מיהם איברי הקבוצה, למשל $\{0,-3,10\}$, אך בד"כ נציין את אבריה ע"י ציון תכונה המאפיינת אותם. למשל, הקבוצה $\{x : x>0\}$ הינה קבוצת כל המספרים החיוביים. אם a שייך לקבוצה A נסמן זאת ע"י $a\in A$ (ואם איננו שייך ל־ A נסמן זאת ב־ $a\notin A$).

נשתמש בסימונים הבאים לקבוצות של מספרים שבהן נפגוש לעתים קרובות:

$\mathbb{R}$ ־ קבוצת כל המספרים הממשיים.

(a,b) ־ קטע פתוח (ללא הקצוות), כלומר $\{x : a<x<b\}$.

$[a,b]$ ־ קטע סגור (עם הקצוות), כלומר $\{x : a\le x\le b\}$.

$(a,b]$ או $[a,b)$ ־ קטע חצי סגור (או חצי פתוח), למשל $(a,b]=\{x : a<x\le b\}$.

(a,∞) או $(-\infty,a)$ ־ קרן פתוחה, למשל $(a,\infty)=\{x : a<x<\infty\}$.

$[a,\infty)$ או $(-\infty,a]$ ־ קרן סגורה, למשל $[a,\infty)=\{x : a\le x<\infty\}$.

$\mathbb{N}$ ־ קבוצת המספרים הטבעיים, כלומר $\{1,2,3...\}$.

$\mathbb{Z}$ ־ קבוצת המספרים השלמים, כלומר $\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$.

$\mathbb{Q}$ ־ קבוצת המספרים הרציונליים, כלומר $\{\frac{a}{b}\ :\ a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ b\neq 0\}$.

יש גם מספרים אי־רציונליים, כלומר כאלה שאי אפשר להציגם כשבר שבו המונה והמכנה שלמים. אפשר להוכיח כי π ו־ e אינם רציונליים.

טענה. $\sqrt{2}$ הוא מספר אי־רציונלי.

הוכחה. נניח בשלילה כי $\sqrt{2}$ רציונלי ונרשום אותו כשבר $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ כאשר a,b שלמים. ע"י צמצום המונה והמכנה, נוכל גם להניח כי השבר מצומצם ־ והסתירה תתקבל מכך שנראה שבהכרח השבר אינו מצומצם: גם המונה וגם המכנה הם מספרים זוגיים!

העברת אגפים והעלאה בריבוע נותנים כי $a^2=2b^2$. ומכיוון ש־ $2b^2$ הוא מספר זוגי, נובע שגם a^2 הוא מספר זוגי. אך הריבוע של מספר אי־זוגי הוא אי־זוגי (הוכיחו!) ולכן גם a עצמו הוא זוגי. נציג אותו בצורה $a=2c$, כאשר c מספר שלם.

לאחר הצבה וחילוק שני האגפים ב־2 מתקבל כי $2c^2 = b^2$. אולם אז, מאותם השיקולים שהצגנו קודם נובע שגם b הוא מספר זוגי. אך אם הן a והן b הם זוגיים הרי שהשבר $\frac{a}{b}$ אינו מצומצם ־ והגענו לסתירה. המסקנה היא שהטענה כן נכונה ו־ $\sqrt{2}$ אי־רציונלי.

משפט. הן המספרים הרציונלים והן האי־רציונלים הם "צפופים" ב־ $\mathbb{R}$, כלומר בין כל שני מספרים ממשיים יש גם מספרים רציונליים וגם אי־רציונליים.

הוכחה. נראה תחילה שבין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר רציונלי. נקבע שני מספרים ממשיים שונים כלשהם $a < b$. אז המספר $b - a$ הוא מספר חיובי ונבחר n טבעי כך ש־ $n > \frac{1}{b-a}$. ע"י הכפלה במכנה נקבל כי $nb - na > 1$, כלומר המרחק בין nb ו־ na גדול מ־ 1, ולכן קיים מספר שלם m המקיים $na < m < nb$. כשנחלק כעת את כל אגפי אי־השוויון ב־ n נקבל כי $a < \frac{m}{n} < b$, כלומר, מצאנו מספר רציונלי $\frac{m}{n}$ בין a ל־ b כמבוקש.

ההוכחה עבור מספר אי־רציונלי נובעת מהמקרה של מספר רציונלי: נמצא מספר רציונלי $\frac{m}{n}$ כך ש־ $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{b}{\sqrt{2}}$ ואז $a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. אך $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ אינו רציונלי, כי אילו היה $\frac{m\sqrt{2}}{n} = \frac{k}{l}$ היינו מקבלים ש־ $\sqrt{2} = \frac{nk}{lm}$, כלומר ש־ $\sqrt{2}$ רציונלי ־ אך אנחנו כבר יודעים שהוא אינו רציונלי!

ערך מוחלט:

הערך המוחלט של מספר x מוגדר ע"י $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$.

המשמעות הגיאומטרית של $|x|$ היא המרחק של x מ־ 0. באופן כללי יותר $|x-a|$ הוא המרחק בין x ל־ a. פירוש אי השוויון $|x-a| < \delta$ הוא, אם כן, שהמרחק של x מ־ a קטן מ־ δ, כלומר, $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

הערך המוחלט מקיים את "אי־שוויון המשולש":

טענה. (i) $|x+y| \leq |x| + |y|$ לכל x, y.

(ii) $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$ לכל x, y.

הוכחה. (i) אם ל־ x ול־ y יש אותו סימן אז יש שוויון. אם הסימנים הפוכים אז באגף שמאל יש צמצום ובימין אין.

(ii) הוכחה פשוטה מתקבלת ע"י הבחנה במקרים עפ"י הסימנים של x ושל y כמו ב־ (i).

אפשר גם להסיק אי שוויון זה מ־ (i): עפ"י (i)

$$|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y|$$

וכשנעביר אגפים נקבל כי $|x| - |y| \leq |x-y|$. באופן דומה גם $|y| - |x| \leq |x-y|$.

אי שוויונים:

נשתמש בקורס הרבה באי שוויונים. כאן נזכיר רק את הכללים הבסיסיים:

(i) אם $a < b$ ו־ $\lambda > 0$ אז גם $\lambda a < \lambda b$. אם $\lambda < 0$ אז כיוון אי השוויון מתהפך.

(ii) אם $a_1 \leq b_1$ ו־ $a_2 \leq b_2$ אז $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$.

דוגמא.

אם $a_1 \leq b_1 \leq c_1$ ו־ $a_2 \leq b_2 \leq c_2$ מה נוכל לאמר על $b_2 - b_1$?
התשובה: את אי השוויון השני נציג כ־ $-c_2 \leq -b_2 \leq -a_2$, וכשנחבר אותו לאי השוויון הראשון נקבל כי $a_1 - c_2 \leq b_1 - b_2 \leq c_1 - a_2$.

<u>סכומים:</u>

נשתמש ב־ $\sum_{i=1}^{n} a_i$ לסימון הסכום $a_1 + \ldots + a_n$.

לדוגמא, הסכום של סדרה אריתמטית סופית עם אבר ראשון a והפרש d ניתן ע"י $\sum_{i=0}^{n}(a+di) = (2a+nd)\frac{n+1}{2}$.

באופן דומה סכום של סדרה גיאמטרית סופית עם אבר ראשון a ומנה $q \neq 1$ ניתן ע"י $\sum_{i=0}^{n} aq^i = a\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

2.2 פונקציות

בהנתן שתי קבוצות A ו־ B אז פונקציה f מ־ A ל־ B היא התאמה המתאימה לכל איבר ב־ A איבר יחיד ב־ B.

נסמן פונקציה f מ־ A ל־ B ע"י $f : A \to B$. לקבוצה A נקרא תחום ההגדרה (או פשוט התחום) של f, ול־ B נקרא הטווח שלה. אנחנו נטפל בקורס הזה רק בפונקציות שבהן גם תחום ההגדרה וגם הטווח הן קבוצות של מספרים ממשיים.

לפעמים הפונקציה מוגדרת באופן טבעי בתחום A_1, אך אנחנו מעוניינים רק בערכיה בתחום חלקי A. במקרה כזה נתייחס ל־ A כתחום של f ונציין זאת במפורש. למשל, הפונקציה $f(x) = x^3$ מוגדרת לכל x אך אם נרצה לדבר על $\sqrt{f(x)}$ נצטרך להגביל את f לתחום החלקי $A = \{x : x \geq 0\}$.

נשתמש בסימון $y = f(x)$ כדי לציין שהפונקציה f מתאימה לאיבר $x \in A$ את האיבר $y \in B$. נאמר שהנקודה y היא <u>התמונה</u> של הנקודה x, והנקודה x נקראת <u>המקור</u> של y.

<u>דוגמאות.</u>

(i) פונקציה יכולה להנתן ע"י נוסחה מפורשת פשוטה, כמו $f(x) = 3x + 4$ או $h(x) = \tan x$ (שתחום הגדרתה הוא כל הישר הממשי פרט לכפולות האי־זוגיות של $\frac{\pi}{2}$).

(ii) פונקציה יכולה להיות מוגדרת גם ע"י "הסבר" מילולי, למשל פונקצית "הערך השלם" $G(x) = [x]$ מתאימה לכל מספר x את המספר השלם הגדול ביותר שאינו עולה על x. למשל $[\pi] = 3$ או $[-2.5] = -3$.

(iii) פונקציה יכולה מוגדרת ע"י נוסחאות שונות בקטעים שונים, למשל

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \qquad ; \qquad F(x) = \begin{cases} x^4 & x \geq 0 \\ \sin x & x < 0 \end{cases}$$

אפשר אפילו להשתמש בנוסחאות שונות באינסוף קטעים. למשל $[x] = n$ בקטע $[n, n+1)$.

נשתמש באופן שוטף במונחים הבאים:

תמונה: כשנתונה $f: A \to B$ אז לא בהכרח כל נקודה $y \in B$ מתקבלת כערך של הפונקציה f. לדוגמא, הפונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^2$ מקבלת רק ערכים אי שליליים.

התמונה של f היא תת הקבוצה של הטווח B שאבריה הם בדיוק האברים שהותאמו בפועל לאיברים ב־ A, כלומר זוהי הקבוצה

$$\{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : x \in A \text{ לאיזשהו } y = f(x)\}$$

על: פונקציה $f: A \to B$ היא על אם התמונה של f היא כל הטווח B. כלומר, אם לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש־ $f(x) = y$. למשל $f(x) = x^3$ היא פונקציה מ־ $\mathbb{R}$ על $\mathbb{R}$, ואילו $f(x) = x^2$ איננה על.

גרף: הגרף של הפונקציה f הוא קבוצת הנקודות (x, y) במישור כך ש־ $y = f(x)$.

חד־חד־ערכית: $f: A \to B$ נקראת חד־חד־ערכית (ובקיצור חח"ע) אם לכל איבר y בתמונה יש x יחיד (שנקרא לו המקור של x) כך ש־ $f(x) = y$. או, במילים אחרות, אם לכל $x_1 \neq x_2$ ב־ A מתקיים שגם $f(x_1) \neq f(x_2)$.

מונוטוניות: נאמר שפונקציה f היא עולה אם לכל $x_1 > x_2$ ב־ A מתקיים ש־ $f(x_1) \geq f(x_1)$. נאמר שהפונקציה f עולה ממש אם לכל $x_1 > x_2$ מתקיים ש־ $f(x_1) > f(x_2)$. באופן דומה מגדירים פונקציה יורדת ופונקציה יורדת ממש. נאמר ש־ f מונוטונית אם היא מקיימת איזשהו תנאי מהתנאים האלה. כל פונקציה מונוטונית ממש היא, כמובן חח"ע.

הפונקציות האלמנטריות.

(a) פולינום הוא פונקציה מהצורה $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. אם $a_n \neq 0$ נאמר שהפולינום הוא ממעלה (או דרגה) n ונסמן $deg(f) = n$. תחום ההגדרה של פולינום הוא כל הישר $\mathbb{R}$. כאשר $n = 0, 1, 2$ מקבלים, בהתאמה, קבועים, פונקציות לינאריות ופונקציות ריבועיות. התמונה של פולינום היא כל הישר (כאשר n אי־זוגי) או חצי ישר (כאשר n זוגי). לפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שרשים.

(b) פונקציה רציונלית היא מנה $f(x) = p(x)/q(x)$ כאשר p, q פולינומים. תחום ההגדרה הוא כל $\mathbb{R}$ פרט לנקודות בהן q מתאפס (ואם $deg(q) = n$ אז יש לכל היותר n נקודות כאלה).

למורה: לפרט קצת ולשרטט גרפים

(c) עבור $a > 0$ קבוע $(a \neq 1)$, הפונקציה המעריכית (או אכספוננציאלית) עם בסיס a היא $f(x) = a^x$. עבור מעריכים שלמים אנחנו מכירים את הכללים

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad ; \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad (*)$$

וכשמגדירים $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$ הכללים $(*)$ ממשיכים להתקיים גם עבור מעריכים רציונליים. לא נסביר במדויק את ההגדרה כאשר x איננו מספר רציונלי, אך הכללים $(*)$ ממשיכים להתקיים גם עבורם.

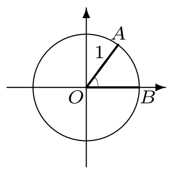
פונקציות מעריכיות עולות כאשר $a > 1$ ויורדות כאשר $0 < a < 1$. תחום ההגדרה הוא כל הישר $\mathbb{R}$ והתמונה היא הקרן $\mathbb{R}_+$. אנחנו נשתמש במונח

"הפונקציה המעריכית" (או הפונקציה האכספוננציאלית) כאשר $a = e$ (נגדיר את המספר e בהמשך) ונכתוב אותה לפעמים בצורה $exp(x)$.

(d) הפונקציות הטריגונומטריות $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי משתמשים <u>ברדיאנים</u> כיחידות של המשתנה בפונקציות הטריגונומטריות, ונזכיר תחילה מהם.

<u>הגדרה.</u> זווית היא בת α רדיאנים אם אורך הקשת שהיא חוסמת במעגל ברדיוס 1 היא α.



$\overset{\frown}{AB} = \alpha$

$\sphericalangle\ AOB = \alpha$

גודל הזווית ברדיאנים הוא כמובן פרופורציונלי לגדלה במעלות $\alpha_{rad} = C \cdot \alpha^\circ$. כדי לקבוע את המקדם C נשתמש בכך שהיקף מעגל ברדיוס 1 הוא 2π והוא מתאים לזווית בת 360°, כלומר, $2\pi = C \cdot 360$. ולכן $C = \frac{2\pi}{360}$ ומקבלים את הנוסחה

$$\alpha_{rad} = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha^\circ \ .$$

להגדרות ופרטים על הפונקציות הטריגונומטריות ראו ב"הכנה טובה לטכניון". כאן נזכיר רק מספר נוסחאות שימושיות:

למורה: לשרטט הגרפים ולהזכיר מחזוריות, זוגיות וזוויות מיוחדות

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^x - 1 \\
\sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}
\end{aligned}$$

בהמשך נוסיף לרשימת הפונקציות האלמנטריות גם את הפונקציות ההפוכות שלהן.

פעולות על פונקציות

פעולות אריתמטיות: פעולות אריתמטיות (חיבור חיסור וכו') מוגדרות על פונקציות בעזרת הפעולות האלה על מספרים ממשיים.

בהנתן שתי פונקציות f ו־ g שיש להן תחום הגדרה משותף, נגדיר פונקציה חדשה $f+g$, המוגדרת אף היא באותו התחום, ע"י הנוסחה

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

לכל x בתחום. לדוגמא, $x^2 + \sin x$ היא הסכום של שתי הפונקציות x^2 ו־ $\sin x$. באופן דומה מגדירים הפרש, מכפלה ומנה של שתי פונקציות ע"י

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad ; \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad ; \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

כאשר תחום ההגדרה של פונקצית המנה מכיל רק את ה־ x־ים בהם $g(x) \neq 0$.

הרכבה: זוהי פעולה מיוחדת לפונקציות. תהיינה $g : A \to B$ ו־ $f : B \to C$ (כלומר התמונה של g מוכלת בתחום ההגדרה של f). אז ההרכבה שלהן מסומנת ב־ $f \circ g$, והיא מוגדרת ע"י הנוסחה

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

כלומר $f \circ g : A \to C$. לדוגמא, אם $f(x) = \sin x$ ו־ $g(x) = x^2$, אז

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$$

בדרך כלל $f \circ g \neq g \circ f$, למשל בדוגמא שנתנו $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2)$.

הפונקציה ההפוכה: אם $f : A \to B$ היא חח"ע ועל, אז לכל $y \in B$ יש $x \in A$ יחיד כך ש־ $f(x) = y$. הפונקציה ההפוכה ל־ f, שתסומן ב־ f^{-1}, היא הפונקציה מ־ B ל־ A המתאימה לכל $y \in B$ את אותו $x \in A$ יחיד.

לדוגמא, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^3$ היא חח"ע על. לכל $y \in \mathbb{R}$ יש $x \in \mathbb{R}$ יחיד ($x = \sqrt[3]{y}$) כך ש־ $x^3 = y$, ולכן הפונקציה ההפוכה היא $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

הערות. (i) אין לבלבל בין הסימון f^{-1} לבין הסימון $\frac{1}{f}$ למנה שהמכנה שלה הוא f. אנחנו תמיד נשתמש בו רק לפונקציה ההפכית.

(ii) הסימון של המשתנה ב־ y אינו מהותי, זה רק שם למשתנה ואפשר להשתמש בכל סימון אחר. בדר"כ נסמן, כרגיל, את המשתנה החפשי ב־ x והפונקציה ההפוכה ל־ $f(x) = x^3$ היא $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

(iii) עפ"י הגדרת הפונקציה ההפוכה, אם $f : A \to B$ ואם קיימת לה פונקציה הפוכה, f^{-1}, אז מתקיימות הזהויות

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = a \qquad \text{לכל} \quad a \in A$$
$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = b \qquad \text{לכל} \quad b \in B$$

(iv) באופן גיאומטרי הגרף של f^{-1} והגרף של f הם אותו עקום במישור בהחלפת התפקידים של x ושל y: ציר ה־ y ישמש כציר המשתנה החפשי וציר ה־ x ישמש כציר המשתנה התלוי. (הנקודה (x,y) היא בגרף של f אם $y=f(x)$, והיא בגרף של f^{-1} אם $x=f^{-1}(y)$ ־ וזה אותו התנאי). למורה: לשרטט

אם רוצים לצייר את הגרפים על אותה מערכת צירים, כאשר ציר ה־ x ישמש כציר המשתנה החפשי בשניהם, עלינו להחליף בגרף של f^{-1} את התפקידים של x ו־ y. ואז הגרף של f^{-1} מתקבל מהגרף של f ע"י שיקוף ב־ $45°$, כלומר ע"י שיקוף ביחס לישר $y=x$.

(v) כאשר $f: A \to B$ איננה חח"ע או איננה על אין לה פונקציה הפוכה, אך ניתן לעיתים "לצמצם" את התחום A והטווח B לתתי־קבוצות שבהן הפונקציה כן תהיה חח"ע ועל.

נדגים את צמצום התחום והטווח כמו בהערה (v) ע"י הרחבת הרשימה של הפונקציות האלמנטריות כך שתכיל גם את הפונקציות ההופכיות של הפונקציות שהגדרנו.

<u>המשך רשימת הפונקציות האלמנטריות:</u>

(e) הפונקציות ההפוכות לפולינומים כאשר הן מוגדרות. למשל אם נסתכל על הפונקציה $f(x)=x^2$ כפונקציה מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$, אז היא איננה חח"ע ואיננה על. אך אם נצמצם את התחום והטווח שלה ל־ $\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$, ונסתכל עליה כעל פונקציה מ־ $\mathbb{R}_+$ ל־ $\mathbb{R}_+$ (ושימו לב כי צמצמנו את הטווח בדיוק לתמונה של f), אז היא כן חח"ע ועל, ויש לה פונקציה הפכית: $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$. (זוהי הדרך המתמטית הפורמלית לאמר שלכל x אי־שלילי יש שורש וכי "תמיד נקח את השורש החיובי").

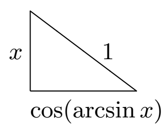
(f) הפונקציות הלוגריתמיות הן ההפכיות של הפונקציות המעריכיות: עבור $0<a\neq 1$ נגדיר $y=\log_a x$ אםם $x=a^y$. התמונה של a^x היא $\mathbb{R}_+$, ולכן הפונקציות הלוגריתמיות מוגדרות לכל $x>0$, ותמונתן היא כל הישר. למורה: לשרטט גרפים

כשניקח $x_j=a^{y_j}$, הכלל $a^{y_1+y_2}=a^{y_1}a^{y_2}$ ייתן $\log_a x_1x_2=\log_a x_1+\log_a x_2$.
באופן דומה $(a^x)^y=a^{xy}$ גורר כי $\log_a x^y=y\log_a x$.
הפונקציה $\log_a x$ עולה כאשר $a>1$ ויורדת אם $a<1$.
אם $a=e$ נכתוב לפעמים $\ln x$ (ונקרא לו "הלוגריתם הטבעי"), אך בדרך כלל נכתוב פשוט $\log x$ ללוגריתם הטבעי. <u>לא נשתמש</u> אף פעם בלוגריתם עם בסיס 10!

(g) הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות. למורה: להסביר הצורך בהגבלת התחום ולשרטט גרפים
ראו פרטים ב"הכנה טובה לטכניון".

<u>דוגמא.</u>

נוכיח כי $\arcsin x+\arccos x=\pi/2$. ואמנם, נציג



ואז $\arcsin x$ הוא הזווית הנגדית לצלע x ו־ $\arccos x$ היא הזווית הסמוכה, וסכומן הוא $\pi/2 = 90^\circ$.

(h) "הפונקציות האלמנטריות" הן כל הפונקציות מהסוגים $(a) - (g)$ וכן כל הפונקציות המתקבלות מהן ע"י סכומים, מכפלות, מנות והרכבות.

פונקציות חסומות: פונקציה $f : A \to B$ נקראת חסומה מלמעלה (או חסומה מלעיל) אם קיים מספר ממשי M כך שלכל $x \in A$ מתקיים $f(x) \leq M$. באופן דומה, פונקציה f נקראת חסומה מלמטה (מלרע) אם קיים מספר ממשי m כך שלכל $x \in A$ מתקיים $f(x) \geq m$. המספרים M ו־m נקראים חסם מלעיל וחסם מלרע של f, בהתאמה.

שימו לב שהחסמים אינם נקבעים באופן יחיד. כך, למשל, אם M חסם מלעיל של f אז כך גם כל מספר M' גדול מ־ M.

פונקציה $f : A \to B$ נקראת חסומה אם היא חסומה גם מלמעלה וגם מלמטה, כלומר כשיש מספרים M ו־m כך שלכל $x \in A$ מתקיים $m \leq f(x) \leq M$ (או, באופן שקול, אם קיים מספר M כך שלכל $x \in A$ מתקיים $|f(x)| \leq M$).

לדוגמא, הפונקציה $f(x) = x^2$ אינה חסומה, והפונקציה $g(x) = \arctan x$ כן חסומה, מכיוון שלכל x מתקיים $|g(x)| \leq \frac{\pi}{2}$.

חשוב להדגיש שהחסימות והחסמים של f תלויים בקבוצה A שבה f מוגדרת (ולכן מינוח מדויק יותר הוא: f חסומה בקבוצה A, M חסם מלעיל של f ב־ A, וכו'). כך למשל $f(x) = x^2$ אינה חסומה מלעיל, אך היא כן חסומה מלעיל בקטע $[-2, 6]$.

2.3 הגדרה, משפט והוכחה

השפה המתמטית היא מאוד מדוייקת וחשוב להבהיר היטב מהם הגדרה, משפט והוכחה, מושגים שבהם נשתמש הרבה בכל הקורסים המתמטיים.

הגדרה. הגדרה היא נתינת שם לעצם מתמטי (למשל, מספר רציונלי, סינוס של זווית, חסם מלעיל של פונקציה וכו') או לתכונה מתמטית (למשל, פונקציה חסומה מלעיל וכו'). נתינת השם מאפשרת בהמשך ניסוח לשוני פשוט, יעיל וקצר כאשר רוצים להתייחס לעצם או התכונה המוגדרים.

משפט. משפט הוא אמירה המצביעה על קשר בין עצמים, מושגים או תכונות מתמטיים.

משפט מתחיל בהנחות, ואח"כ באה הטענה שמתוך הנחות אלה נובעת מסקנה מסויימת.

לדוגמא: לכל מספר טבעי n השארית של n^2 בחלוקה ב־ 4 שונה מ־ 3.

כאן ההנחה היא שדנים במספר טבעי שהוא ריבוע שלם, והמסקנה היא על צורת התוצאה של פעולה אריתמטית מסויימת על מספר כזה.

חשוב כמובן להבחין בין ההנחות לבין המסקנה הנטענת ואין להחליף בין התפקידים. "המשפט ההפוך" למשפט נתון הוא משפט שבו ההנחה היא המסקנה של המשפט הנתון והמסקנה היא ההנחה של המשפט הנכון. המשפט ההפוך

למשפט נכון הוא בד"כ לא נכון. למשל, בדוגמא לעיל אין זה נכון שכל מספר המשאיר שארית שונה מ־ 3 הוא ריבוע שלם.

כאשר משפט וגם המשפט ההפוך לו נכונים או לא נכונים ביחד, כלומר, כאשר הנחות המשפט שקולות לוגית למסקנה, הניסוח יהיה בד"כ בצורה "(א) שקול ל־ (ב)", או "(א) אם ורק אם (ב)". (בכתיבה נשתמש לפעמים בקיצור המקובל "אסם" ל"אם ורק אם").

נשתמש גם במינוח "טענה" או "למה" (מילה לועזית שפירושה "טענת עזר"). מבחינה עניינית הם בדיוק כמו משפטים, אך בדר"כ אלה יהיו משפטים פחות מרכזיים.

<u>הוכחה.</u> הוכחה של משפט נעשית ע"י מעבר מהנחות המשפט למסקנה, בצעד אחד או בכמה צעדים, כשבכל צעד יוצאים מההנחות (או מחלק מהן, או ממסקנות ביניים שהוסקו מהן בצעדים קודמים, או מתכונות מתמטיות ידועות) ומגיעים בעזרת הסקה לוגית למסקנת ביניים. הצעד אחרון בשורת הסקות לוגיות אלה יהיה המסקנה הנטענת בניסוח המשפט.

לדוגמא, נוכיח את המשפט שניסחנו למעלה. נבחין בשני מקרים:

<u>מקרה א'.</u> n זוגי. במקרה זה נוכל להציג $n = 2k$ עבור איזשהו מספר טבעי k. נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל כי $n^2 = 4k^2$, כלומר, n^2 מתחלק ב־ 4 ולכן השארית היא 0.

<u>מקרה ב'.</u> n איזוגי. במקרה זה נוכל להציג $n = 2k + 1$ עבור איזשהו מספר טבעי k. נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל כי $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ (עפ"י הנוסחה ל־ $(a + b)^2$). שני המחוברים הראשונים מתחלקים ב־ 4 ולכן השארית היא 1.

היות וכל מספר טבעי הוא או זוגי או איזוגי הרי ששני המקרים האלה מכסים את כל האפשרויות ־ ובשניהם השארית איננה 3. מ.ש.ל.

כדי להראות שמשפט הוא נכון יש להוכיח אותו לכל המקרים שבהם ההנחות מתקיימות. כדי להראות שאיננו נכון די להביא "דוגמא נגדית" אחת, כלומר, מקרה אחד שבו הנחות המשפט מתקיימות ־ אך המסקנה איננה מתקיימת.

הוכחה "בדרך השלילה": בשיטה זו אנו מניחים כי הטענה איננה נכונה ומגיעים לסתירה לאחד הנתונים או לאחת המסקנות שהסקנו מהנתונים במהלך ההוכחה, או לעובדה מתמטית ידועה. משהגענו לסתירה, המסקנה היא כי הנחת השלילה לא יכולה להיות נכונה ־ ולכן הטענה עצמה היא אכן נכונה.

****

סוף שעה 7

****

פרק 3

גבולות של פונקציות

3.1 גבול של פונקציה

מושג הגבול הוא מושג בסיסי ביותר בחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, והוא מופיע בצורות ובהקשרים רבים ושונים. כשאומרים ש"לפונקציה f יש גבול ב־ a וערכו הוא L" הכוונה היא שבנקודות קרובות מספיק ל־ a ערכי f קרובים מאוד למספר L. ובאופן פורמלי:

<u>הגדרה.</u> תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מסויימת של הנקודה a (כלומר באיזשהו קטע פתוח המכיל את הנקודה a), פרט אולי לנקודה a עצמה. נאמר שיש ל־ f גבול בנקודה a וערכו L אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים $0 < \delta$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$. נסמן זאת ע"י $\lim_{x\to a} f(x) = L$ או $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$.

למורה: לשרטט

במקום לאמר שיש ל־ f גבול בנקודה a וערכו L נאמר לפעמים ש־ L הוא הגבול של f בנקודה a, או ש־ L הוא הגבול של f כאשר x שואף ל־ a, או ש־ f שואפת ל־ L ב־ a.

<u>הסבר.</u> קבוצת הנקודות

$$\{(x,y) : a-\delta < x < a+\delta ; L-\varepsilon < y < L+\varepsilon\}$$

היא מלבן במישור שרוחבו 2δ, גבהו 2ε, ומרכזו בנקודה (a, L). הגדרת הגבול אומרת שלכל בחירה של ε (כלומר, אפילו כשגובהו המלבן קטן מאוד) אפשר לבחור את בסיסו (כלומר את δ) כך שחלק הגרף המתאים ל־ x־ים שבבסיס מוכל כולו במלבן.

באופן יותר "ציורי": נתייחס למלבן כאל "חלון", ואז הדרישה היא שאפילו אם גבהו של החלון קטן מאוד אפשר, ע"י הגבלת גודל הבסיס, להבטיח שכל חלק הגרף המתאים "ייראה דרך החלון".

<u>דוגמאות.</u>

(i) $\lim_{x\to 2}(3x+5) = 11$.

נקבע $\varepsilon > 0$ כלשהו, וצריך להוכיח שקיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-2| < \delta$ אז $|3x+5-11| < \varepsilon$.
נציג $|3x+5-11| = |3x-6| = 3|x-2|$, והדרישה היא שביטוי זה יהיה קטן מ־ ε או, באופן שקול, כי $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$. וזה אומר לנו איך לבחור את δ: נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

(ii) $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$.
נקבע $\varepsilon > 0$ כלשהו, ונשתמש בכך שלכל t מתקיימים אי־השוויונים $|\sin t| \le |t|$ ו־ $|\cos t| \le 1$. **נציג**

$$|\sin x - \sin a| = |2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}| \le 2|\sin\frac{x-a}{2}| \le 2|\frac{x-a}{2}| = |x-a|$$

לכן, אם נבחר $\delta = \varepsilon$ אז $|x-a| < \delta$ יבטיח כי

$$|\sin x - \sin a| \le |x-a| < \delta = \varepsilon \ .$$

(iii) באופן דומה: $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$.

למורה: את $(iv),(v)$ רק לשרטט

(iv) אם a אינו מספר שלם אז $\lim_{x\to a}[x] = [a]$, אם a שלם אז $\lim_{x\to a}[x]$ לא קיים.

(v) הגבול $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ אינו קיים.

הערה. בהגדרת הגבול f אינה חייבת להיות מוגדרת בנקודה a עצמה. למעשה, אפילו אם f מוגדרת בנקודה a ומקבלת שם ערך מסויים, אין לערך זה חשיבות הן מבחינה עקרונית והן מעשית.
החשיבות העקרונית של העובדה שלערך של f בנקודה a אין משמעות היא שמושג הגבול מתאר תופעה "דינמית": ההתנהגות של הפונקציה f כאשר ערכי x מתקרבים לנקודה a. אנו לא מתעניינים בערך של f בנקודה a, אלא רק בשאלה אם כאשר מתקרבים לנקודה a ערכיה מתקרבים למספר L.
מבחינה מעשית, ישנם מקרים חשובים רבים בהם ערך הפונקציה ב־ a באמת לא יהיה מוגדר. לדוגמא, כאשר נטפל בנגזרת של פונקציה נתונה $g(x)$ בנקודה b, אנו נתבונן בגבול $\lim_{t\to 0}\frac{g(b+t)-g(b)}{t}$. אם נסמן $f(t) = \frac{g(b+t)-g(b)}{t}$, אז למעשה אנחנו בודקים את הגבול $\lim_{t\to 0} f(t)$ של הפונקציה f בנקודה $t=0$, והפונקציה f באמת לא מוגדרת עבור $t=0$!

דוגמאות.

(i) אם

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \ x \ne \pi \\ 7 & , \ x = \pi \end{cases}$$

אז $\lim_{x\to\pi} f(x) = 0$. אפילו אם f לא היתה מוגדרת כלל בנקודה π הגבול שם היה 0.

$(ii)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$.

בדוגמא זו הפונקציה אמנם אינה מוגדרת בנקודה $x=2$ עצמה, אך הגבול בנקודה זו קיים: לכל $x\neq 2$ מתקיים כי $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$, ולכן

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

<u>**הערה.**</u> **בדיקה פשוטה מראה כי אם $\lim_{x\to a}f(x)=L$ אז $\lim_{x\to a}|f(x)|=|L|$ (שרטטו זאת!). אם $L\neq 0$ ההפך בדר"כ אינו נכון, אבל אם $L=0$ אז $\lim_{x\to a}f(x)=0$ אם ורק אם $\lim_{x\to a}|f(x)|=0$.**

לפעמים שימושי להשתמש במינוח הבא:

<u>**הגדרה.**</u> אם הקטע הפתוח $I=(\alpha,\beta)$ מכיל את הנקודה a נקרא לו גם סביבה של הנקודה a.

אותו הקטע הפתוח I, אולם <u>ללא</u> הנקודה a עצמה, נקרא סביבה מנוקבת של a.

אם $\varepsilon>0$ והקטע הוא $I=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ נאמר ש־ I הוא סביבת־ε של a. (האורך של הקטע הוא אז 2ε, וכמובן שהשימוש באות ε דוקא אינו חשוב, ונוכל לדבר על סביבת־δ או להשתמש בכל סימון אחר). באופן דומה נדבר על סביבת־ε מנוקבת של a.

בשימוש במונחים אלה, נחשוב על x כ"קרוב" ל־ a אם הוא שייך ל־ סביבת־ε של a עבור ε "קטן".

שימו לב כי x שייך ל־ סביבת־ε של a אם ורק אם $|x-a|<\varepsilon$, וכי x שייך ל־ סביבת־ε מנוקבת של a אם ורק אם $0<|x-a|<\varepsilon$.

אם נשתמש בשפה זו, הגדרת הגבול תראה כך:

<u>**הגדרה.**</u> תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. נאמר כי $\lim_{x\to a}f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x השייך ל־ δ־סביבה המנוקבת של a מתקיים ש־ $f(x)$ שייך ל־ סביבת־ε של L.

או, בניסוח קצת גמיש יותר, $\lim_{x\to a}f(x)=L$ אם לכל סביבה J של L יש סביבה מנוקבת I של הנקודה a כך $f(x)\in J$ לכל $x\in I$ (כלומר, שהחלק המתאים של הגרף נמצא בחלון הנקבע ע"י I ו־ J).

<u>**טענה.**</u> נניח כי $\lim_{x\to a}f(x)=L$, אז

(i) יש סביבה מנוקבת של a שבה f חסומה.

(ii) לכל $K<L$ קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $f>K$ (ולכל $M>L$ יש סביבה מנוקבת של a שבה $f<M$ לכל x באותה סביבה).

<u>**הוכחה.**</u> **(i) נקבע איזשהם מספרים K ו־ M כך ש־ $K<L<M$. עפ"י הגדרת הגבול יש סביבה מנוקבת I של a כך שהחלק המתאים של הגרף נמצא**

בחלון הנקבע ע"י I ו־ $J=(K,M)$. בפרט f חסומה ב־ I מלמעלה ע"י M ומלמטה ע"י L.

למורה: לשרטט

(ii) ההוכחה של (i) נותנת סביבה מנוקבת שבה $f>K$.

<u>טענה.</u> אם הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים אז הוא יחיד, כלומר, לא ייתכן ש־ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ וגם $\lim_{x\to a} f(x)=K$ עבור $K\neq L$.

למורה: להוכיח רק בשרטוט

3.1.1 אריתמטיקה של גבולות

עד עכשיו טיפלנו בגבולות ובחישובם רק עפ"י ההגדרה המפורשת של גבול: בהנתן ε חיפשנו δ המתאים לו. בסעיף זה נתחיל לפתח שיטות לחישוב הגבול של פונקציה עפ"י המבנה שלה, כך שלא נצטרך להתחיל מההגדרות היסודיות בכל דוגמא מחדש.

<u>משפט.</u> תהיינה f ו־ g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מסויימת של a (פרט אולי לנקודה a עצמה) והמקיימות $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ו־ $\lim_{x\to a} g(x)=M$. אזי הגבולות הבאים קיימים וניתנים ע"י הנוסחאות המתאימות:

(i) לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{x\to a}\alpha f(x)=\alpha L$.

(ii) $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=L+M$.

(iii) $\lim_{x\to a}(fg)(x)=LM$.

(iv) אם $M\neq 0$ אז גם $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$ (ובפרט קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $g(x)\neq 0$).

<u>דוגמא.</u>

כדי לחשב את $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x-4}{5x^2+2x+7}$ נשתמש במשפט ו"נעקוב" אחרי המבנה של הפונקציה: נחשב תחילה בנפרד את הגבולות של כל מחובר במונה ובמכנה תוך שימוש ב־ (i) וב־ (iii) (לכדי לחשב את $\lim_{x\to -1}x^2=(-1)^2=1$), אח"כ נשתמש ב־ (ii) לחישוב הגבול של המונה ולחישוב הגבול של המכנה ־ ולבסוף נשתמש ב־ (iv) ונחלק אותם זה בזה. התוצאה הסופית, $-6/10$, היא הגבול המבוקש.

<u>הוכחת המשפט.</u>

(i) נניח כי $\alpha\neq 0$ (המקרה $\alpha=0$ ברור). נקבע $\varepsilon>0$ וצריך למצוא $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ יתקיים $|\alpha f(x)-\alpha L|<\varepsilon$. ובאמת, המספר $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ גם הוא מספר חיובי, ולכן עפ"י הגדרת הגבול יש $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ יתקיים $|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$, ולכן גם

$$|\alpha f(x)-\alpha L|=|\alpha|\,|f(x)-L|<|\alpha|\cdot\frac{\varepsilon}{|\alpha|}=\varepsilon\ .$$

(ii) נקבע $\varepsilon > 0$ וצריך למצוא $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ יתקיים $|(f(x)+g(x))-(L+M)| <$ ε. הבחירה תעשה בשלבים:
מהנתון ש־ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ נובע שקיים $\delta_1 > 0$ כך ש

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

לכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta_1$. באופן דומה, מהנתון ש־ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ נובע שקיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta_2$ מתקיים

$$|g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

אם נבחר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ואם x מקיים $0 < |x-a| < \delta$ אז יתקיימו שני אי־השוויונים בבת אחת ונקבל

$$\begin{aligned} |(f(x)+g(x)) - (L+M)| &= |(f(x)-L) + (g(x)-M)| \\ &\leq |f(x)-L| + |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

(iii) נקבע $\varepsilon > 0$ וצריך למצוא $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ יתקיים $|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$.
על מנת להבין את רעיון ההוכחה, נתחיל מהסוף. נרשום

$$f(x)g(x) - LM = f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)$$

וננתח כל מחובר בנפרד.
נתחיל מהמחובר השני: נתון $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ולכן יש $\delta_1 > 0$ כך שאם x מקיים $0 < |x-a| < \delta_1$ אז $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$, ולכן

$$|M(f(x) - L)| < \frac{|M|\varepsilon}{2(|M|+1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

הטיפול במחובר הראשון קצת יותר מורכב כי במקום המספר הקבוע M (הכופל את הסוגריים במחובר השני), כאן יש לנו פונקציה, f, ונצטרך תחילה להעריך אותה. לפי הטענה שהוכחנו, אנו יודעים כי קיימת סביבה מנוקבת של a בה f חסומה. כלומר, קיימים $T > 0$ ו־ $\delta_2 > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta_2$ מתקיים כי

$$|f(x)| < T$$

וכעת הערכת המחובר הראשון דומה לזו של השני: עפ"י הנתון $\lim_{x\to a} g(x) = M$, ולכן קיים $\delta_3 > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta_3$ מתקיים כי

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2T}$$

נבחר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, ואז לכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ יתקיימו כל שלושת אי השוויונים בבת אחת.
משני אי־השוויונים האחרונים נובע כי

$$|f(x)(g(x) - M)| < \frac{T\varepsilon}{2T} = \frac{\varepsilon}{2}$$

וביחד עם אי השוויון הראשון נקבל

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)(g(x)-M) + M(f(x)-L)| \\ &\leq |f(x)(g(x)-M)| + |M(f(x)-L)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

(iv) השלימו את ההוכחה כתרגיל בדרך הבאה: השתמשו בהצגה

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} = \frac{M(f(x) - L)}{Mg(x)} + \frac{L(M - g(x))}{Mg(x)}$$

והעריכו כל מחובר בנפרד. שימו לב שמתוך $\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$ נובע שיש סביבה מנוקבת מסוימת של a שבה $|g(x)| > |M|/2$, ולכן $\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{2}{|M|}$ שם.

הערה. שימו לב שהמשפט ההפוך אינו תקף: מתוך ידיעת הגבול של הפונקציה הסופית אי אפשר להסיק כלום על רכיביה. למשל, אם ידוע שמתקיים השוויון $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L+M$, לא ניתן להסיק כי $\lim_{x\to a} f(x) = L$ או כי $\lim_{x\to a} g(x) = M$, ואפילו אי אפשר להסיק שגבולות אלה קיימים בכלל.

נדגים זאת באופן קיצוני: נקח פונקציה f כלשהי (ובפרט נוכל לקחת פונקציה שאין לה כלל גבול בנקודה מסויימת a), ונקח $g=-f$. אז $f(x)+g(x)=0$ לכל x, ובפרט $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=0$. אך אי אפשר להסיק מכך כלום על f המקורית שהיתה כללית לגמרי.

למעשה ניתן לחשב ישירות גבולות הרבה יותר מסובכים בעזרת "מעקב" אחרי הפעולות האלמנטריות שמהן נבנית פונקציה. למשל, חישוב כזה ייתן כי $\lim_{x\to 2}\sin\frac{x^2+1}{e^x}=\sin\frac{5}{e^2}$.

הכלל הוא שאם $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$ ואם $g(y)\underset{y\to f(a)}{\longrightarrow} L$ אז $\lim_{x\to a} g(f(x))=L$.

(ושימו לב שהדרישה היא שהגבול $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ הוא $f(a)$ ולא סתם איזשהו מספר!). כמסקנה נקבל את התוצאה החשובה הבאה:

מסקנה. לכל פונקציה אלמנטרית אפשר לחשב גבולות באופן ישיר, ובתנאי שלא חורגים מתחומי ההגדרה של הרכיבים ומהנקודות שבהן הרכיבים מקיימים את התנאי הנוסף כי לכל רכיב כזה h מתקיים כי $\lim_{x\to b} h(x)=h(b)$ בנקודות b המתאימות.

3.1.2 וריאציות על הנושא

לעיתים נרצה לבחון את התנהגות של פונקציה בנקודה מסויימת a כאשר x מתקרב אליה רק מצד אחד. למשל, עבור הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$, המשתנה x יכול "להתקרב" ל־ 0 רק מצד ימין. לשם כך נגדיר גבולות חד צדדיים.

הגדרה. תהי f מוגדרת בקטע (a,b) (לקטע כזה נקרא סביבה ימנית של a). נאמר כי L הוא גבול מימין של f בנקודה a אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $a<x<a+\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$. נסמן זאת ע"י $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ או $f(x)\underset{x\to a^+}{\to} L$.

באופן דומה, נאמר כי L הוא גבול משמאל של f בנקודה a אם f מוגדרת בסביבה שמאלית של a, ואם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $a-\delta<x<a$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$. נסמן זאת ע"י $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ או $f(x)\underset{x\to a^-}{\to} L$.

דוגמא.

לפונקציה $f(x)=[x]$ יש גבולות חד צדדיים גם בנקודות השלמות, והם שונים זה מזה: אם a מספר שלם אז $\lim_{x\to a^+}[x]=a$ ואילו $\lim_{x\to a^-}[x]=a-1$.

למורה: לשרטט

הטענה הבאה ברורה

טענה. תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I ותהי a נקודה פנימית של הקטע. אז יש ל־ f גבול בנקודה a אםם הגבולות החד־צדדיים של f ב־ a קיימים ושווים. (בפרט, אם אחד

הגבולות החד־צדדיים לא קיים, או ששניהם קיימים אך שונים זה מזה, אז $\lim_{x\to a} f(x)$ לא קיים).

נעבור כעת לווריאציה נוספת: גבולות כאשר x שואף לאיסוף

<u>הגדרה.</u> תהי f מוגדרת בקרן (a,∞). נאמר כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M > a$ כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.
אם f מוגדרת בקרן שמאלית $(-\infty, b)$ נגדיר $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ באופן אנלוגי.

<u>דוגמאות.</u>

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, **כי אם נתון** $\varepsilon > 0$ **אז נבחר** $M = 1/\varepsilon$, **ואז** $x > M$ **גורר כי** $0 < \frac{1}{x} < 1/M = \varepsilon$.

(ii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to-\infty}(1 + \frac{1}{x}) = 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 1$.

<u>הערה.</u> "חוקי האריתמטיקה" של גבולות תקפים גם עבור גבולות חד־צדדיים וגבולות באינסוף.

נדבר גם על "גבולות אינסופיים":

<u>הגדרה.</u> תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. נאמר כי $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ אם לכל מספר M קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים כי $f(x) > M$.
באופן דומה, נאמר כי $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ אם לכל M קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים כי $f(x) < M$.
גבולות חד־צדדים, כגון $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ יוגדרו באופן דומה.

למורה: לשרטט

<u>דוגמאות.</u>

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

(ii) $\lim\limits_{x\to(-\pi/2)^+} \tan x = -\infty$

<u>הערות.</u> (i) כאשר פונקציה שואפת לגבול שיכול להיות או סופי, או ∞ או $-\infty$ נוהגים לפעמים לומר שהגבול "קיים במובן הרחב". גם אנחנו נשתמש לפעמים בטרמינולוגיה זו. מכל מקום, כשנאמר שגבול מסויים קיים מבלי להתייחס במפורש לאפשרות שהוא אינסופי הכוונה תהיה תמיד לכך שהגבול <u>סופי</u>.

(ii) יש להתייחס בזהירות רבה לכללי האריתמטיקה של גבולות כאשר אחד או יותר מהם הם אינסופיים. למשל, הכלל ש־ $\lim(f+g)(x) = \lim f(x) + \lim g(x)$ תקף אם אחד משני הגבולות $\lim f(x)$ או $\lim g(x)$ הוא סופי, או אם שניהם אינסופיים עם אותו סימן. אך אם $\lim f(x) = +\infty$ ו־ $\lim g(x) = -\infty$ אז לביטוי $\lim f(x) + \lim g(x)$ אין בכלל משמעות!

לביטויים מהצורה $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ וכדומה אין משמעות ובגבולות מצורה זו יש לטפל באמצעים אחרים ולא ע"י כללי אריתמטיקה. כמו כן, חשוב לשים לב כי כאשר $f(x) \to 0$, לא בהכרח מתקיים ש־ $1/f(x) \to \infty$. זה קורה רק אם מניחים תנאי נוסף: ש־ $f(x) > 0$ בסביבה מנוקבת מסויימת של a.

(iii) אנו משאירים לקורא להגדיר גבולות איסופיים באינסוף, כלומר גבולות מהצורה $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ או $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ וכו'.

3.1.3 תכונות סדר של גבולות

משפט. תהיינה f ו־ g מוגדרות בסביבה מנוקבת של a כך ש־ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ו־ $\lim_{x\to a} g(x) = M$. אם $L < M$ אז יש סביבה מנוקבת I של a כך ש־ $f(x) < g(x)$ לכל $x \in I$.

באופן שקול: אם $f(x) \geq g(x)$ לכל x בסביבה מנוקבת של a אז $L \geq M$.

הוכחה. ציירו "חלונות".

הערות. (i) המשפט נכון, בשינויים המתאימים, גם לגבולות חד־צדדיים, לגבולות באינסוף ולגבולות אינסופיים.

(ii) אם נדרוש אי שוויון חריף $f(x) < g(x)$, לא נוכל להסיק כי $L < M$, אלא רק $L \leq M$. לדוגמא, נתבונן ב־ $f(x) = x^2$ וב־ $g(x) = 2x^2$. אמנם $f(x) < g(x)$ לכל $x \neq 0$, אולם $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

לעתים קרובות אי אפשר לחשב גבול ע"י כללי האריתמטיקה. המשפט הבא הוא אחד מהמכשירים החשובים לחישוב גבולות גם במקרים כאלה.

משפט. [סנדוויץ'] אם שלוש הפונקציות f, g, h מוגדרות בקטע (a, b) ומקיימות שם כי $f \leq g \leq h$, ואם $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} h(x) = L$, אז גם הגבול $\lim_{x\to a^+} g(x)$ קיים, וגם ערכו הוא L. (המשפט נכון גם עבור גבולות משמאל, עבור גבולות דו־צדדיים ועבור גבולות באינסוף. כמו כן אם $f \leq g$ ואם $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ אז גם $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$).

למורה: לשרטט

הוכחה. נקבע $\varepsilon > 0$. בגלל קיום הגבולות יש סביבה מנוקבת I של a כך שגם הגרף של f וגם הגרף של h נמצאים בחלון בעל גובה 2ε מעל הסביבה הזו. אבל הגרף של g נמצא בין שני הגרפים האלה, ולכן גם הוא מוכל בחלון.

דוגמאות.

למורה: לשרטט

(i) נראה כי $\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$ (למרות שזה מקרה פרטי של $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$, שאותו ראינו כבר, כשמציבים $a = 0$). ואמנם לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $0 < \sin x < x$, ולכן אם נשאיף $x \to 0^+$ נקבל את הרצוי. מאחר ו־ $\sin$ פונקציה אי־זוגית, כלומר, $\sin(-x) = -\sin x$, גם הגבול משמאל ב־ 0 שווה ל־ 0, ולכן $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

כמסקנה נקבל כי $\cos x = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2}) \underset{x\to 0}{\to} 1$.

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

נקבע זווית $0 < x < \frac{\pi}{2}$ במעגל ברדיוס 1. שטח הגזרה שנוצר על ידה הינו ביחס $\frac{x}{2\pi}$ לשטח המעגל כולו (שהוא π), כלומר השטח הוא $\frac{x}{2\pi}\cdot\pi = \frac{x}{2}$. שטח זה קטן יותר משטח המשולש ישר הזווית החיצוני (שהוא $\frac{\tan x}{2}$), ולכן $\frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$ או

למורה: לשרטט

$$0 < \sin x < x < \tan x.$$

כל הביטויים באי השוויון הם חיוביים, ולכן $\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$, וע"י הכפלה ב־$\sin x$ נקבל כי $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, ועל סמך משפט הסנדוויץ' $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$.

היות ו־$\frac{\sin x}{x}$ הינה פונקציה זוגית, נקבל שגם הגבול משמאל ב־0 שווה ל־1, ולכן $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

(iii) נראה שאם $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ואם g פונקציה חסומה בסביבה מנוקבת של a, אז $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. ובאמת, נניח כי $|g(x)| \le T$ בסביבה, ואז

$$-T|f(x)| \le f(x)g(x) \le T|f(x)| \quad .$$

ושני האברים הקיצוניים שואפים לאפס, ולכן גם האמצעי.

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x + x^4\cos^2 x}{\sin^4 x} = \infty$. כי $x^2\cos x + x^4\cos^2 x > x^2\cos x$ ו־$\sin^4 x < x^4$, ולכן

$$\frac{x^2\cos x + x^4\cos^2 x}{\sin^4 x} \ge \frac{x^2\cos x}{x^4} = \frac{\cos x}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty \quad .$$

3.2 קבוצות ופונקציות חסומות

בהקדמה הגדרנו פונקציה חסומה ואת החסמים שלה. נרחיב כעת את ההגדרה לקבוצות.

__הגדרה.__ (i) קבוצה $A \subset \mathbb{R}$ נקראת חסומה מלמעלה (או חסומה מלעיל) אם קיים מספר ממשי M כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x \le M$. כל מספר M כזה נקרא חסם מלעיל של A. באופן אנלוגי מגדירים קבוצה חסומה מלמטה (מלרע) וחסם מלרע.

(ii) קבוצה A נקראת חסומה אם היא חסומה גם מלמעלה וגם מלמטה, כלומר כשיש מספרים M ו־m כך ש־$m \le x \le M$ לכל $x \in A$. (או, באופן שקול, אם קיים מספר $M > 0$ כך ש־$|x| \le M$ לכל $x \in A$).

(iii) חסם המלעיל הקטן ביותר של קבוצה A נקרא הסופרמום (או החסם העליון) של A, ויסומן ע"י $\sup A$, או $\sup_{x\in A} x$. אם הסופרמום שייך לקבוצה A הוא נקרא גם המכסימום של A, ויסומן ע"י $\max A$ או $\max_{x\in A} x$. באופן דומה האינפימום (או החסם התחתון) של A הוא חסם המלרע הגדול ביותר של A, ואם האינפימום שייך לקבוצה A הוא נקרא גם המינימום של A. הסימונים הם $\inf A$, $\min_{x\in A} x$ וכדומה.

(iv) הטרמינולוגיה לפונקציות מתקבלת כאשר משתמשים במונחים האלה עבור התמונה שלהן. כל, למשל, M הוא חסם מלעיל של פונקציה f בתחום D אם הוא חסם מלעיל של הקבוצה $\{f(x) : x \in D\}$. החסם המלעיל הקטן ביותר של f בתחום D נקרא הסופרמום (או החסם העליון) שלה ויסומן ב־ $\sup_D f$, או $\sup_{x\in D} f(x)$. אינפימום (או חסם תחתון), מכסימום ומינימום של f ב־ D מוגדרים ומסומנים באופן דומה.

דוגמאות.

(i) קטע חצי סגור $I = (a, b]$ הינו קבוצה חסומה. כל מספר $M \geq b$ הוא חסם מלעיל של I וכל מספר $m \leq a$ הוא חסם מלרע. החסם העליון הוא b והתחתון הוא a. המכסימום מתקבל, $\max\{x : x \in I\} = b$, אך אין ל־ I מינימום.

(ii) קבוצת המספרים הטבעיים חסומה מלמטה, אך אינה חסומה מלמעלה. כלומר: $\min \mathbb{N} = 1$, אולם לא קיים ל־ $\mathbb{N}$ סופרמום.

(iii) $\inf_{x>0} \frac{1}{x} = 0$, אולם אפס אינו ערך של הפונקציה, ולכן $\min_{x>0} \frac{1}{x}$ לא קיים.

(iv) $\sup_{x\in\mathbb{R}} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, אך הערך $\frac{\pi}{2}$ אינו מתקבל, ולכן $\max_{x\in\mathbb{R}} \arctan x$ לא קיים.

(v) נסתכל בפונקציה $x - x^2 = x(1-x)$ בקטע $I = (-4, 1)$. היא מתאפסת בנקודות $x = 0; 1$, חיובית בקטע $(0,1)$ ושלילית בשאר הנקודות. בהמשך הקורס נלמד איך להראות באופן שיטתי כי $\max_{x\in I}(x - x^2) = \frac{1}{4}$ (והוא מתקבל ב־ $x = \frac{1}{2}$), וכי $\inf_{x\in I}(x - x^2) = -20$ אולם הפונקציה אינה מקבלת מינימום. (נסו לשרטט את הגרף של הפונקציה ולשכנע את עצמכם בעובדות אלה!).

הערה. כאשר הגדרנו סופרמום ואינפימום הנחנו באופן סמוי כי לכל קבוצה חסומה מלמעלה אכן קיים חסם מלעיל שהינו הקטן ביותר (ובאופן אנלוגי עבור החסם התחתון). עובדה זו אכן נכונה, אך להוכחתה יש להגדיר את המספרים הממשיים באופן מתמטי מדוייק ־ ואנו לא נעשה זאת. לכן נתייחס לעובדה זו כ"אקסיומה" (ונקרא לה "אקסיומת השלמות"): לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים החסומה מלמעלה (מלמטה) קיים סופרמום (אינפימום).

כדי להסביר את המינוח הזה, נתבונן במספרים הרציונליים כאוסף של נקודות בישר הממשי שמשאירות "חורים" רבים (שהינם המספרים האי־רציונליים). האקסיומה אומרת שהמספרים הממשיים הם מערכת "שלמה" ־ אין בה "חורים" כאלה.

המשפט החשוב הבא שונה באופן מהותי ממשפטים על גבולות שראינו עד עתה. במשפטים קודמים כל טענה על קיום גבול היתה מלווה בנוסחה לחישובו. למשל, אחד מחוקי האריתמטיקה של גבולות אמר שאם $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ו־ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ אז גם $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ קיים וערכו הוא $L + M$. המשפט הבא הוא הראשון המבטיח שגבול מסויים קיים (בתנאים מתאימים) בלי לתת נוסחה, או דרך מעשית כלשהי, לחישובו.

משפט. תהי f פונקציה מונוטונית וחסומה בסביבה חד־צדדית של הנקודה a. אז הגבול החד־צדדי של f קיים בנקודה a.

למורה: להוכיח רק בשרטוט

הוכחה. נניח למשל שהפונקציה עולה בסביבה ימנית I של a.
עפ"י הנתון הקבוצה $\{f(x) : x > a \ , \ x \in I\}$ חסומה מלמטה, ועפ"י אקסיומת השלמות יש לה אינפימום. נסמן אותו ב־ m ונוכיח כי $\lim_{x\to a^+} f(x) = m$.
נקבע $\varepsilon > 0$ כלשהו, וצריך למצוא $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $a < x < a+\delta$ מתקיים $|f(x) - m| < \varepsilon$ או, באופן שקול, $m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon$.
מכיוון ש־ m הינו האינפימום של הקבוצה A ו־ $m+\varepsilon$ גדול ממש מ־ m, אז עפ"י הגדרת האיפימום יש $b > a$ בקטע I כך ש־ $f(b) < m + \varepsilon$. מהגדרת m ומהמונוטוניות של f נובע כי לכל $x \in (a, b)$ מתקיים

$$m - \varepsilon < m \leq f(x) \leq f(b) < m + \varepsilon.$$

אם נגדיר $\delta = b - a$ נקבל כי $a + \delta = b$, ולכן קבלנו כי לכל $x \in (a, a+\delta)$ מתקיים $m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon$, כלומר $\lim_{x\to a^+} f(x) = m$.

מסקנה. תהי f פונקציה מונוטונית בקטע I. אז הגבולות החד־צדדיים של f קיימים בכל נקודה בקטע.

הערות. (i) כאשר f מונוטונית ואינה חסומה בסביבה חד צדדית של נקודה a, אז יש לה גבול חד־צדדי אינסופי בנקודה. (הוכיחו כתרגיל!)

(ii) משפט דומה נכון גם כאשר I קרן והגבול הוא ב־ ∞ או $-\infty$.

****
סוף שעה 15
****

פרק 4

גבולות של סדרות

4.1 סדרות של מספרים ממשיים

סדרה הינה אוסף אינסופי מסודר של מספרים: יש איבר ראשון, איבר שני, איבר שלישי וכולי. (באופן פורמלי ניתן להתבונן על סדרה כעל פונקציה מהמספרים הטבעיים למספרים הממשיים).

אנו נסמן סדרה ע"י $\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$, או $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$, או $(c_j)_{j=1}^{\infty}$, או (α_k). ייתכן שתפגשו גם סימונים נוספים.

איברי הסדרה יכולים להינתן באמצעים שונים. הדרך הישירה היא באמצעות נוסחה מפורשת, כגון: $x_j = 1$ לכל j, או $a_n = n^2/3$ לכל n, או $b_m = [\sqrt{m}]$ לכל m. דרך אחרת היא לתת כלל שלפיו הסדרה מוגדרת. למשל, a_n הינו הספרה ה־ n־ית אחרי הנקודה בפיתוח העשרוני של π. אפשרות אחרת היא להציג את הסדרה בעזרת "נוסחת נסיגה". למשל, "סדרת פיבונאצ'י" מוגדרת ע"י

$$a_1 = a_2 = 1 \qquad \text{ו־} \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{לכל} \quad n \geq 3.$$

לחישוב a_n עפ"י נוסחה זו, עלינו לחשב תחילה את האברים הקודמים לו, ורק אז ניתן לבצע את הצעד הנוסף.

<u>הערה:</u> הראו באינדוקציה שאברי הסדרה ניתנים גם ע"י הנוסחה המפורשת

$$a_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \Big/ \sqrt{5}.$$

4.2 גבולות של סדרות

הרעיון בהגדרת גבול של סדרה דומה לזה של גבול של פונקציה.

<u>הגדרה.</u> נאמר ש־ a הוא הגבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$. נסמן זאת ע"י $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ או $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

אם לסדרה אין גבול נאמר שהיא מתבדרת.

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ נאמר גם שהסדרה שואפת, או מתכנסת, ל־ a. ולפעמים לא נציין בכתיבה כי $n \to \infty$ ונכתוב פשוט $\lim a_n = a$ או $a_n \to a$.

ההגדרה בלשון סביבות: $a_n \to a$ אם לכל סביבה I של a, כל אברי הסדרה – פרט אולי למספר סופי מהם – נמצאים ב־ I.

הערות. (i) שימו לב כי שינוי של מספר <u>סופי</u> מאברי הסדרה לא משפיע על התכנסות הסדרה, או על ערך הגבול שלה.

(ii) הדרישה ש־ N טבעי אינה חיונית, ולפעמים לא נקפיד על כך.

<u>דוגמאות.</u>

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. כדי להוכיח זאת נקבע $\varepsilon > 0$ כלשהו, וצריך להוכיח שקיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. אי־השוויון הזה שקול לאי השוויון $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ולכן, אם נבחר $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ (או כל N אחר המקיים ש־ $N > \frac{1}{\varepsilon}$), אז לכל $n > N$ יתקיים אי השוויון הדרוש.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$. כי נקבע $\varepsilon > 0$ כלשהו, ואז התנאי $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = 1/n < \varepsilon$ מתקיים אםם $n > \frac{1}{\varepsilon}$, ולכן שוב נבחר $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

(iii) אם $|q| < 1$ אז $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. כי נקבע $\varepsilon > 0$ כלשהו, וצריך להוכיח שקיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$. אם $\varepsilon \geq 1$ אז אי־שוויון זה נכון לכל n ולכן נוכל לבחור $N = 1$. נטפל אם כך במקרה $\varepsilon < 1$, נשתמש במונוטוניות של הלוגריתם, ונתבונן ב"שרשרת השקילויות"

$$|q|^n < \varepsilon \iff \ln |q|^n < \ln \varepsilon \iff n \ln |q| < \ln \varepsilon \iff n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$$

(הכיוון של אי השוויון האחרון התחלף מכיון ש־ $|q| < 1$ ולכן $\ln |q| < 0$). ולכן אם נבחר $N = [\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}] + 1$ (או כל N הגדול מהביטוי $\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$), אז לכל $n > N$ מתקיים אי־השוויון הרצוי.

המשפטים הבאים, על אריתמטיקה ועל סדר של גבולות של סדרות, הם אנלוגיים לאלה שראינו כבר עבור גבולות של פונקציות. לא נוכיח אותם.

<u>משפט.</u> [אריתמטיקה של גבולות] אם $\{a_n\}$ ו־ $\{b_n\}$ שתי סדרות המקיימות $\lim a_n = a$ ו־ $\lim b_n = b$. אז הגבולות הבאים קיימים וניתנים ע"י הנוסחאות המתאימות:

(i) $\lim \alpha a_n = \alpha a$ לכל $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

(iii) $\lim(a_n b_n) = ab$.

(iv) $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ בתנאי ש־ $b \neq 0$.

<u>דוגמא.</u>

$$.\frac{n^2+3n-4}{5n^2+2n+7}=\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{5+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}\to\frac{1}{5}$$

הערות. (i) נגדיר גם גבולות אינסופיים: נאמר ש־ $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ אם לכל M יש N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n>M$. באופן אנלוגי מגדירים $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

לדוגמא, אם $q>1$ אז $\lim_{n\to\infty}q^n=\infty$. אך אם $q\le -1$ אז $\lim_{n\to\infty}q^n$ לא קיים גם במובן הרחב.

(ii) אריתמטיקה של גבולות אינסופיים אנלוגית גם היא לזו של פונקציות (עם אותה התייחסות זהירה עבור $\frac{1}{a_n}$ כאשר $a_n\to 0$, ולגבולות לא מוגדרים מהצורה $\infty-\infty$ או $\frac{\infty}{\infty}$ וכיו"ב).

משפט. תהיינה a_n ו־ b_n שתי סדרות המקיימות $a_n\to a$, $b_n\to b$. אם $a<b$ (אי שוויון חריף) אז קיים N כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $a_n<b_n$.

באופן שקול, אם $a_n\to a$, $b_n\to b$ ואם קיים N כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $b_n\le a_n$, אז $b\le a$.

הערה. שימו לב כי אם מניחים במשפט רק אי שוויון חלש $a\le b$ הטענה אינה נכונה. כי אם $a=b$ אז אין שום מגבלה על היחסים בין a_n ל־ b_n. ניקח למשל $a_n=0$ לכל n ו־ $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

משפט. [משפט הסנדוויץ'] תהיינה a_n, b_n ו־ c_n סדרות המקיימות $a_n\le b_n\le c_n$ (החל ממקום N מסויים) כך ש־ $\lim a_n=\lim c_n=L$. אז גם הגבול $\lim b_n$ קיים וערכו L. אם $a_n\le b_n$ ו־ $\lim a_n=\infty$ אז גם $\lim b_n=\infty$.

דוגמאות.

(i) $\lim\sqrt[n]{n}=1$. כי $\sqrt[n]{n}>1$ לכל n, ולכן נציג $\sqrt[n]{n}=1+h_n$ כאשר $h_n>0$, ועלינו להוכיח כי $h_n\to 0$. ובאמת, נעלה את שני האגפים של השוויון שרשמנו בחזקת n ונקבל (עפ"י נוסחת הבינום) כי

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\binom{n}{2}h_n^2+\ldots+h_n^n>\binom{n}{2}h_n^2=\frac{n(n-1)h_n^2}{2}.$$

ולכן $h_n^2<\frac{2}{n-1}$, או $0<h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$. אך אגף ימין שואף ל־ 0 ולכן עפ"י משפט הסנדוויץ גם $h_n\to 0$.

(ii) $\sqrt[n]{a}\to 1$ לכל $a>0$. כי אם $a\ge 1$ אז $1\le\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$ לכל $n>a$ ומשתמשים ב־ (i) ובמשפט הסנדוויץ'.

אם $0<a<1$, נרשום $b=\frac{1}{a}$, ואז $b>1$. עפ"י מה שכבר הוכחנו $\sqrt[n]{b}\to 1$, ולכן גם $\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}\to 1$.

המושגים סדרה עולה, יורדת ממש, מונוטונית, וכו' מוגדרים באופן טבעי. למשל, סדרה היא עולה ממש אם $a_{n+1}>a_n$ לכל n.

<u>משפט.</u> סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת (וסדרה מונוטונית שאינה חסומה מתכנסת במובן הרחב: ל־ $+\infty$ אם היא עולה, ול־ $-\infty$ אם היא יורדת).

<u>דוגמאות.</u>

(i) נקבע $c>0$ ונגדיר סדרה באופן רקורסיבי: $a_1=1$ ו־ $a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}$. נראה שהסדרה מונוטונית וחסומה, ולכן מתכנסת. לאחר מכן, נחשב את הגבול עפ"י חוקי האריתמטיקה.

<u>חסימות</u>: הסדרה חסומה מלרע, שכן $a_n\geq 0$ לכל n (זכרו שלוקחים תמיד שורש אי־שלילי). נראה באינדוקציה ש־ $a_n\leq 1+c$ ועל כן היא גם חסומה מלעיל. זה ודאי נכון עבור $n=1$. נניח נכונות הטענה עבור n ונוכיח עבור $n+1$

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}\leq\sqrt{1+c+c}=\sqrt{1+2c}<\sqrt{(1+c)^2}=1+c$$

(אי־השוויון הראשון נובע מהנחת האינדוקציה).

<u>מונוטוניות</u>: נראה באינדוקציה כי $a_n\leq a_{n+1}$ לכל n. זה נכון עבור $n=1$, ואם נניח $a_n\leq a_{n+1}$ נקבל כי:

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}\leq\sqrt{a_{n+1}+c}=a_{n+2}\ .$$

עפ"י המשפט נקבל כי הסדרה מתכנסת לגבול, שנסמנו A, ומכיוון ש־ $a_n\geq 0$ לכל n נובע שגם $A\geq 0$. לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל ש־ $A^2=A+c$, והשורש <u>החיובי</u> של המשוואה הריבועית הזו הוא $A=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

(ii) אין להשתמש באריתמטיקה של גבולות על מנת לחשב את הגבול מבלי לוודא תחילה באופן אחר כי הסדרה אכן מתכנסת. לדוגמא, אם $a_1=1$ ו־ $a_n=1-a_{n-1}$, אז $a_n=1$ ל־ n איזוגי ו־ $a_n=0$ ל־ n זוגי, ולכן הסדרה אינה מתכנסת. אולם אם נניח קיום הגבול ונבצע חישובים אריתמטיים כדי לחשב אותו נקבל כי $A=1-A$, כלומר, $A=\frac{1}{2}$, שזו כמובן שטות.

(iii) הסדרה $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ עולה וחסומה (לא נוכיח זאת בכיתה, אך ההוכחה מופיעה בהמשך באותיות קטנות), ולכן מתכנסת. נסמן את הגבול ב־ e, ונשים לב שזו <u>ההגדרה</u> של e. אין לנו דרך להגדירו באופן מפורש ע"י גדלים אחרים שאנו מכירים, הוא אינו רציונלי ואפילו איננו שורש של פולינום עם מקדמים שלמים (כמו $\sqrt{2}$ שהוא שורש של המשוואה $x^2-2=0$).

<u>חסימות</u>:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-j+1}{n}\\ &\leq \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\\ &\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}<3\end{aligned}$$

(באי השוויון הראשון השתמשנו בכך ש־ $\frac{n-k}{n} \leq 1$ לכל $0 \leq k \leq n$, ובשני השתמשנו בהערכה $j! \geq 2^{j-1}$ (הוכיחו אותה!). השוויון האחרון הוא הנוסחה לסכום סדרה גיאומטרית עם $q = \frac{1}{2}$).

מונוטוניות:
כדי להראות שהסדרה מונוטונית עולה נשתמש ב"אי־שוויון הממוצעים" האומר שאם $b_j \geq 0$ אז

$$\left(\prod_{j=1}^{m} b_j\right)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} b_j .$$

נציב באי־השוויון את הערכים $b_1 = 1$ ו־ $b_j = 1 + \frac{1}{n}$ לכל $2 \leq j \leq n+1$, ונקבל

$$\left(1 \cdot (1+\tfrac{1}{n})^n\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1 + n(1+\frac{1}{n})}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

ואם נעלה את שני האגפים בחזקת $n+1$ נקבל

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

הערות. (i) כפי שנראה בהמשך למספר e יש חשיבות רבה במתמטיקה. חשיבות זו מובעת, למשל, גם בשם "לוגריתם טבעי" ללוגריתם עם בסיס e.

(ii) לא נוכיח את ההכללות החשובות הבאות:

(a) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\lambda}{n})^n = e^\lambda$ לכל מספר λ (ולא רק עבור $\lambda = 1$).

(b) גם כגבול של פונקציה מתקיים $\lim_{x\to 0}(1+\lambda x)^{1/x} = e^\lambda$ לכל מספר λ.

(iii) לגבול $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\lambda}{n})^n = e^\lambda$ יש חשיבות רבה גם "בחיי היום־יום". הוא מתאר את המעבר בין חישובי גידול תקופתיים לחישוב גידול רציף. נדגים זאת בחישובי רבית:

כשבנק מודיע שהרבית השנתית בתכנית חסכון היא p (ונסמן $\lambda = \frac{p}{100}$) אחוזים הוא עדיין לא נתן תיאור מלא שלה. אם הרבית מחושבת אחת לשנה, אז על כל שקל שיושקע בתחילת השנה נזוכה בסוף השנה ב־ $1+\lambda$ ש"ח. אך אם הזיכוי ייעשה כל חצי שנה הרי שבתום התקופה הראשונה נזוכה ב־ $1+\frac{\lambda}{2}$ ש"ח ובסוף השנה ב־ $(1+\frac{\lambda}{2})(1+\frac{\lambda}{2}) = (1+\frac{\lambda}{2})^2$ ש"ח. באופן דומה, אם הזיכוי ייעשה כל רביע יהיה הזיכוי השנתי $(1+\frac{\lambda}{4})^4$ ש"ח, ובאופן כללי אם מזכים בסוף כל אחת מ־ n תקופות שוות אז הזיכוי השנתי יהיה $(1+\frac{\lambda}{n})^n$ ש"ח. הגבול כאשר $n\to\infty$ מתאר "חישוב רבית רציף" וייתן זיכוי שנתי בסך e^λ ש"ח.

ואכן בתיאור מלא של תכנית חסכון מופיעים שני מספרים: "הרבית השנתית הנומינלית" ו"הרבית השנתית האפקטיבית". הראשון הוא p (או $\lambda = \frac{p}{100}$), והשני הוא הרבית השנתית בפועל עפ"י מדיניות החישוב של הבנק: ב־ n תקופות או באופן רציף.

ההסבר עם רבית דרבית נותן גם הסבר (אם כי לא הוכחה מדויקת) מדוע הסדרה $(1+\frac{1}{n})^n$ עולה וחסומה:

אם $m < n$ אז בחישוב ב־ n תקופות נזוכה בסכום גדול מאשר ב־ m תקופות. ולכן (עבור $\lambda = 1$) נקבל כי $(1+\frac{1}{m})^m < (1+\frac{1}{n})^n$, כלומר, הסדרה $(1+\frac{1}{n})^n$ מונוטונית עולה.

החסימות נובעת מנסיוננו בחיים: לא שמענו על אף אחד שהפקיד בבנק סכום כסף לשנה ובסופה הבנק נתן לו אינסוף כסף...

(iii) $a_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$. זו בוודאי סדרה מונוטונית עולה כי במעבר מ־ a_n ל־ a_{n+1} מוסיפים מחובר חיובי. היא גם חסומה, שכן

$$1 \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = 1 + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right)$$

שהוא "סכום טלסקופי" שערכו $1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$, ועפ"י המשפט הסדרה מתכנסת.

המשפט אינו נותן דרך לחישוב הגבול. למעשה, הגבול הינו $\frac{\pi^2}{6}$, אך כדי לבצע את החישוב נדרש ידע מעבר לחומר של הקורס הזה.

(iv) כעת נוכל להסביר כיצד אנו מגדירים a^x עבור מספר ממשי x כלשהו (כאשר $1 \neq a > 0$). לשם נוחות, נניח כי $x > 0$. נרשום אותו בייצוגו העשרוני $x = k.p_1p_2\ldots$, ונתבונן בסדרה המונוטונית $q_n = k.p_1p_2\ldots p_n$. סדרה זו מתכנסת ל־ x (כי הפיתוחים העשרוניים של x ושל q_n מתלכדים עד המקום ה־ n־י, ולכן $|q_n - x| \leq 10^{-n}$).

עפ"י "חוקי החזקות", שאותם אנחנו מכירים מביה"ס עבור מעריכים שהם מספרים רציונליים, גם הסדרה $a_n = a^{q_n}$ מונוטונית: עולה כאשר $a > 1$, ויורדת כאשר $a < 1$. הסדרה גם חסומה: מלמטה ע"י 0, ומלמעלה ע"י $a^{[x]+1}$ כאשר $a > 1$, ו־ 1 כאשר $a < 1$. ע"ס המשפט a_n מתכנסת, ואנו נגדיר את a^x להיות הגבול שלה.

אנחנו לא ניכנס יותר לפרטים, אך ניתן להראות (ואנחנו נשתמש בכך באופן חופשי) כי כל "חוקי החזקות" ממשיכים להתקיים גם עבור מעריכים ממשיים. כמו כן ניתן גם להוכיח כי אם $x_n \to x$ היא סדרה מתכנסת כלשהי (גם בלי לדרוש שאבריה יהיו רציונליים או שהיא מונוטונית), אז $a^{x_n} \to a^x$.

4.3 תת־סדרות

הגדרה. תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה. תת־סדרה של $\{a_n\}$ היא סדרה שאיבריה הם חלק מאיברי $\{a_n\}$ כשהם מופיעים באותו הסדר כמו בסדרה המקורית. נסמן זאת ע"י $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, כאשר $n_1 < n_2 < \ldots$ מייצגים את המיקומים בסדרה המקורית של האיבר הראשון, השני, וכו' בתת הסדרה.

שימו לב שלכל j מתקיים ש־ $n_j \geq j$, כי j הוא האיבר ה־ j־י בסדרת כל המספרים הטבעיים, ואילו n_j הוא האבר ה־ j־י בסדרה עם דילוגים.

דוגמאות.

(i) $n_j = 2j$. כאן ניקח את האיברים המופיעים במקומות הזוגיים בסדרה $\{a_n\}$, כלומר, $a_2, a_4, a_6, \ldots$.

(ii) $n_j = j^2$. כאן ניקח את האיברים שמופיעים במקומות שהם "ריבועים", כלומר, $a_1, a_4, a_9, \ldots$.

הגדרה. נתונה הסדרה (a_n). גבול חלקי של הסדרה (a_n) הוא גבול של איזושהי תת־סדרה שלה.

דוגמא.

הסדרה $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ אינה מתכנסת, אך יש לה תתי סדרות מתכנסות ושני גבולות חלקיים שונים $\lim_{j\to\infty} a_{2j} = 1$ ו־ $\lim_{j\to\infty} a_{2j+1} = -1$.

המשפט הבא, שאותו ניתן ללא הוכחה, נותן איפיון נוח לגבולות חלקיים של סדרה.

למורה: לשרטט

משפט. L הינו גבול חלקי של הסדרה (a_n) אםם כל סביבה I של L מכילה אינסוף מאיברי (a_n).

טענה. אם הסדרה (a_n) מתכנסת לגבול L (סופי או אינסופי), אז גם כל תת־סדרה שלה מתכנסת ל־ L. בפרט, אם יש לסדרה שתי תת־סדרות המתכנסות לגבולות שונים, אז היא איננה מתכנסת.

למורה: לשרטט

הוכחה. אם $a \neq L$ אז יש סביבות I (של L) ו־ J (של a) שהן זרות. אבל אז J אינו יכול להכיל אינסוף מאברי הסדרה כי כולם, פרט למספר סופי, נמצאים דווקא ב־ I!

דוגמאות.

(i) הסדרה $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ אינה מתכנסת כי יש לה שני גבולות חלקיים שונים זה מזה.

(ii) $\lim \sqrt[2^n]{2^n} = 1$ כי זו תת סדרה של הסדרה $\sqrt[n]{n}$ שאנחנו יודעים שגבולה הוא 1.

סדרה חסומה אינה חייבת, כמובן, להתכנס, אך המשפט החשוב הבא (אותו לא נוכיח) מבטיח שתמיד יש לה <u>תת סדרה</u> מתכנסת:

משפט. [בולצאנו־ויירשטראס] לכל סדרה חסומה (a_n) יש תת־סדרה מתכנסת. אם הסדרה איננה חסומה יש לה תת־סדרה המתכנסת במובן הרחב: ל־ $+\infty$ אם אינה חסומה מלמעלה, ול־ $-\infty$ אם אינה חסומה מלמטה.

הגדרה. תהי a_n סדרה חסומה. הגבול החלקי הגדול ביותר של סדרה a_n נקרא הגבול העליון שלה ויסומן ב־ $\limsup a_n$ או $\overline{\lim}\, a_n$. הגבול התחתון מוגדר באופן דומה ויסומן ב־ $\liminf a_n$ או $\underline{\lim}\, a_n$.

דוגמא.

ראינו שלסדרה $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ יש שני גבולות חלקיים. הגבול העליון שלה הוא 1 והתחתון -1.

נעיר עוד כי לסדרה כללית ייתכנו אפילו אינסוף גבולות חלקיים.

4.4 הקשר בין גבול של פונקציות לגבול של סדרות

לאמר כי $\lim_{x\to a} f(x) = L$, פירושו שכאשר x "קרוב" ל־ a אז ערכי הפונקציה "קרובים" ל־ L. אם ניקח רק ערכי x מסויימים ה"מתקרבים" ל־ a (ולא את כל ה־ x־ים האפשריים) בוודאי שערכי הפונקציה בנקודות אלה יתקרבו ל־ L. למשל, אם ניקח סדרת נקודות x_n כך ש־ $x_n \neq a$ המקיימת ש־ $x_n \to a$, אז בוודאי שסדרת ערכי f המתקבלים, $f(x_n)$, תקיים גם היא כי $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

למורה: לשרטט

דוגמא.

נראה איך בודקים באמצעות הערה זו שהגבול $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ לא קיים.

נניח בשלילה שהגבול קיים וערכו L. עפ"י ההערה לכל סדרה $0 \neq x_n \to 0$ היה צריך להתקיים ש־ $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n} = L$. אבל לשתי הסדרות $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ ו־ $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ מתקיים

$$\begin{aligned} f(a_n) &= \sin\frac{1}{a_n} = \sin 2n\pi = 0 \to 0 \\ .\ f(b_n) &= \sin\frac{1}{b_n} = \sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 1 \to 1 \neq 0 \end{aligned}$$

המשפט הבא, שהוא המשפט ההפוך להערה הפשוטה שפתחנו בה, הוא עמוק יותר וניתן אותו ללא הוכחה.

משפט. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של a. אם לכל סדרת נקודות $x_n \neq a$ המקיימת ש־ $x_n \to a$ מתקיים ש־ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ אז גם $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

למורה: לשרטט

הערות. (i) באופן דומה $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אםם לכל סדרה x_n המקיימת ש־ $x_n \to \infty$ מתקיים ש־ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

(ii) מושג הגבול מופיע בהרבה צורות שעשויות להראות שונות (למשל גבולות של פונקציות, סדרות ותת־סדרות, ובהמשך נראה צורות נוספות). אך לכולן יש מכנה משותף: כולן מתארות תהליך דינמי של קירוב של גודל מסוים (הגבול) ע"י גדלים אחרים התלויים בפרמטר (שיכול להיות בדיד, למשל n או n_k, או רציף, למשל x) כאשר הפרמטר מתקרב לערך נתון או לאינסוף.

****

סוף שעה 19

****

פרק 5

פונקציות רציפות

5.1 הגדרה ותכונות יסודיות

<u>הגדרה.</u> תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מסויימת של a (**כולל בנקודה a עצמה!**). נאמר ש־ f רציפה בנקודה a אם הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים ושווה ל־ $f(a)$.

כאשר כותבים במפורש את תנאי קיום הגבול בלשון ε־δ הניסוח הוא:
לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ לכל x המקיים $|x - a| < \delta$.

כאשר כותבים במפורש את תנאי קיום הגבול בלשון סדרות הניסוח הוא:
לכל סדרה x_n כך ש־ $x_n \to a$ מתקיים ש־ $f(x_n) \to f(a)$.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הפונקציה $f \equiv 1$ רציפה בכל נקודה, מכיוון ש־ $\lim_{x\to a} f(x) = 1 = f(a)$ לכל נקודה a.

(ii) הפונקציה $f(x) = x$ רציפה בכל נקודה, מכיוון ש־ $\lim_{x\to a} f(x) = a = f(a)$ לכל נקודה a.

(iii) (למעשה ראינו כבר את החישוב הבא) הפונקציה $f(x) = \sin x$ רציפה בכל נקודה, כי מאי השוויונים $|\cos t| \leq 1$ ו־ $|\sin t| \leq |t|$ נובע כי

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \\ &\leq 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a| \underset{x\to a}{\to} 0 \end{aligned}$$

(iv) הפונקציה $f = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ איננה רציפה ב־ $x = 0$, מכיוון שהגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ לא קיים (הגבולות החד־צדדיים ב־ 0 אינם שווים זה לזה). נעיר

כי פונקציות כאלה מופיעות לעיתים קרובות בשימושים לתחומים אחרים. למשל, הזרם במעגל חשמלי לפני הפעלת המפסק ולאחריו מתואר ע"י פונקציה כזו.

<u>הגדרה.</u> (i) נאמר שהפונקציה f רציפה מימין בנקודה a אם $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. באופן דומה מגדירים רציפות משמאל.

(ii) נאמר שפונקציה f רציפה בקטע אם היא רציפה בכל נקודה פנימית בו, ורציפה מימין או משמאל בנקודות הקצה שלו (אם הן שייכות לקטע).

<u>דוגמא.</u>

הפונקציה $f(x) = [x]$ רציפה בלכל נקודה a שאיננה מספר שלם, והיא איננה רציפה אם a שלם. באופן מפורט יותר, אם a מספר שלם אז $\lim_{x\to a^+}[x] = a$ ו־ $\lim_{x\to a^-}[x] = a-1$, לכן f רציפה מימין בנקודה זו, אך איננה רציפה משמאל שם.

<u>הערה.</u> באופן אינטואיטיבי (למרות שזה לא מדוייק!), ניתן לחשוב על פונקציה רציפה בקטע כעל פונקציה שניתן לשרטט את הגרף שלה בקטע מבלי "להרים את העפרון מהדף". אנו נחזור לרעיון זה בהמשך.

<u>משפט.</u> (i) אם הפונקציות f ו־ g רציפות בנקודה a, אז גם הפונקציות αf, $f+g$, fg ו־ $\frac{f}{g}$ (כאשר $g(a)\neq 0$) רציפות ב־ a.

(ii) תהי $f\circ g$ ההרכבה של הפונקציות f ו־ g. אם g רציפה בנקודה a, ואם f רציפה בנקודה $b=g(a)$, אז $f\circ g$ רציפה בנקודה a.

(iii) אם הפונקציה f רציפה ומונוטונית ממש בקטע, אז קיימת לה שם פונקציה הפוכה f^{-1} שגם היא רציפה ומונוטונית ממש.

<u>הוכחה.</u> (i) ההוכחה נובעת ישירות מאריתמטיקה של גבולות. (הוכיחו זאת!).

(ii) נשתמש בהגדרת הרציפות בעזרת סדרות: נניח כי הסדרה x_n מקיימת $x_n \to a$ **ונוכיח כי** $(f\circ g)(x_n) \to (f\circ g)(a)$. **נתון כי g רציפה ב־ a, ולכן** $y_n = g(x_n) \to g(a) = b$. **אך ידוע גם ש־ f רציפה ב־ $g(a)=b$ ולכן**

$$(f\circ g)(x_n) = f(y_n) \to f(b) = (f\circ g)(a) \ .$$

(iii) לא נוכיח סעיף זה במדוייק, ורק ניתן הסבר אינטואיטיבי.

באופן אינטואיטיבי פונקציה היא רציפה אם ניתן לשרטט את הגרף שלה "מבלי להרים את העפרון מהדף". אך הגרף של f^{-1} הינו שיקוף סביב הישר $y=x$ של הגרף של f, ולכן אם ניתן לשרטט את הגרף של הפונקציה f "מבלי להרים את העפרון מהדף", אז ניתן לעשות זאת גם לגרף של f^{-1}, כלומר, f^{-1} רציפה גם היא. למורה: לשרטט

המונוטוניות ברורה. נניח למשל שהפונקציה f עולה ממש, ואז $x<y$ אם ורק אם $s=f(x)<f(y)=t$, כלומר $s<t$ אםם $x=f^{-1}(s)<f^{-1}(t)=y$.

הערה. דרך מקוצרת לכתיבת הרציפות היא $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$, או אף בקיצור רב יותר $\lim f(x) = f(\lim x)$. בכתיבה כזו ההוכחה של (ii) היא

$$\lim(f\circ g)(x) = \lim f(g(x)) = f(\lim g(x)) = f(g(\lim x)) = (f\circ g)(\lim x) .$$

דוגמאות.

(i) הפונקציה $\cos x = \sin(x+\pi/2)$ רציפה כהרכבה של הפונקציות הרציפות $f(x)=\sin x$ ו־ $g(x)=x+\pi/2$.

(ii) הפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ רציפה בכל נקודה פרט ל־ $x=0$.

על פי כללי האריתמטיקה, מהדוגמא שחישבנו של $\sin x$ ומהמשפט נקבל את המסקנה החשובה הבאה

מסקנה. כל הפונקציות האלמנטריות רציפות בכל תחום הגדרתן.

(למעשה לא הוכחנו ש־ a^x, ולכן גם $\log_a x$ רציפות, אך גם זה נכון).

למה. תהי f פונקציה רציפה בנקודה a כך ש־ $f(a)>0$. אז יש ל־ a סביבה שבה $f(x)>0$ לכל x. טענה אנלוגית נכונה עבור $f(a)<0$, וכמו כן ניתן, כמובן, להחליף את 0 בכל מספר אחר M.

הוכחה. f רציפה בנקודה a ו־ $f(a)>0$, לכן יש סביבה I שלה שבה, למשל, היא תקיים ש־ $f(x)>\frac{f(a)}{2}>0$. למורה: לשרטט

5.2 מיון נקודות אי־רציפות

הגדרה. (i) נאמר שלפונקציה f יש אי־רציפות סליקה בנקודה a אם הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ קיים, אך אינו שווה ל־ $f(a)$ או ש־ f אינה מוגדרת כלל בנקודה a. (לדוגמא: לפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ יש אי־רציפות סליקה בנקודה $x=0$ בין אם אנו מגדירים את $f(0)$ כמספר השונה מ־ 1, ובין אם איננו מגדירים כלל את הפונקציה ב־ 0).

(ii) נאמר שלפונקציה f יש אי־רציפות מסוג קפיצה בנקודה a אם שני הגבולות החד־צדדיים $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ו־ $\lim_{x\to a^-} f(x)$ קיימים, אך שונים זה מזה. (לדוגמא: הפונקציה $f(x)=[x]$ בנקודות השלמות). נקודות קפיצה נקראות לעיתים נקודות אי־רציפות מהסוג הראשון.

(iii) נאמר שלפונקציה f יש אי־רציפות עיקרית בנקודה a אם לפחות אחד משני הגבולות החד־צדדיים $\lim_{x\to a^+} f(x)$ או $\lim_{x\to a^-} f(x)$ אינו קיים. (לדוגמא: $\sin(1/x)$ או $1/x$ ב־ $x=0$). נקודות אי־רציפות עיקריות נקראות לעיתים נקודות אי־רציפות מהסוג השני.

מכיוון שלפונקציה מונוטונית בקטע יש גבולות חד־צדדיים בכל נקודה בו נקבל

משפט. תהי f פונקציה מוגדרת ומונוטונית בקטע. אז נקודות אי־הרציפות שיכולות להיות לה הן רק מסוג קפיצה.

5.3 פונקציות רציפות בקטע סגור

עד עתה עסקנו בחלק "הטכני" של מושג הרציפות: הגדרות, פעולות אריתמטיות על פונקציות רציפות וכו'. כעת נעבור לעסוק בתכונות עמוקות יותר של פונקציות רציפות בקטע.

המשפט הראשון ממחיש את האינטואיציה שהגרף של פונקציה רציפה הוא כזה שניתן לשרטט אותו "מבלי להרים את העפרון מהדף", ולכן אינו יכול לעבור מערך אחד לערך אחר מבלי לעבור את כל ערכי הביניים.

משפט. [משפט ערך הביניים] תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, ויהי α מספר כלשהו בין $f(a)$ ל־ $f(b)$. אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש־ $f(c)=\alpha$.

למורה: לשרטט המשפט וההוכחה

הוכחה. נניח, בלי הגבלת הכלליות, כי $f(a)<f(b)$ ונגדיר באינדוקציה סדרת קטעים סגורים באופן הבא. הקטע הראשון יהיה $[a_0,b_0]$ כאשר $a_0=a$ ו־ $b_0=b$. כדי להגדיר את $[a_1,b_1]$ נחלק את הקטע $[a_0,b_0]$ לשני חלקים שווים $[a_0,\frac{a_0+b_0}{2}]$ ו־ $[\frac{a_0+b_0}{2},b_0]$ ונבחין בשלוש אפשרויות:

(i) אם $f(\frac{a_0+b_0}{2})=\alpha$ סיימנו את ההוכחה (כי ניקח $c=\frac{a_0+b_0}{2}$).

(ii) אם $f(\frac{a_0+b_0}{2})<\alpha$ נסמן $[a_1,b_1]=[\frac{a_0+b_0}{2},b_0]$.

(iii) אם $f(\frac{a_0+b_0}{2})>\alpha$ נסמן $[a_1,b_1]=[a_0,\frac{a_0+b_0}{2}]$.

נשים לב כי בשני המקרים (ii) ו־ (iii) מתקיים כי $f(a_1)<\alpha<f(b_1)$. כלומר אנחנו במצב דומה למצב בתחילת ההוכחה בהבדל אחד: ארכו של הקטע $[a_1,b_1]$ הוא $b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$, כלומר, חצי מהאורך המקורי.

נמשיך באופן אינדוקטיבי ונבנה סדרת קטעים $[a_n,b_n]$ כך ש־

(1) הקטע $[a_n,b_n]$ מוכל ב־ $[a_{n-1},b_{n-1}]$.

(2) $f(a_n)<\alpha<f(b_n)$.

(3) $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$.

כפי שרואים מהשרטוט קצות הקטעים a_n ו־ b_n צריכים להתכנס לגבול משותף שנסמנו ב־ c. הוכחה: עפ"י (1) הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית עולה והסדרה $\{b_n\}$ יורדת, כמו כן שתי הסדרות חסומות (כי הן מוכלות בקטע $[a,b]$), ולכן הן מתכנסות. עפ"י (3) מתקיים $b_n-a_n\to 0$, ולכן יש להן גבול משותף, שנסמנו ב־ c. נראה שזוהי הנקודה המבוקשת.

מאחר ו־ $c \to a_n$ ו־ f רציפה נקבל כי $f(a_n) \to f(c)$. אך $f(a_n) < \alpha$ לכל n, ולכן הגבול יקיים $f(c) \leq \alpha$. באופן דומה נסיק מ־ $f(b_n) > \alpha$ ש־ $f(c) \geq \alpha$.
קבלנו ש־ $\alpha \leq f(c) \leq \alpha$ ולכן $f(c) = \alpha$ כמבוקש.

<u>הערה</u>. המשפט מבטיח קיום של לפחות נקודה c אחת. אך בהחלט ייתכן שתהיינה כמה נקודות כאלה (שרטטו!).

<u>שיטת חישוב</u>. הוכחת המשפט נותנת למעשה שיטת חישוב למציאת פתרון מקורב למשוואה $f(x) = \alpha$. "שיטת חישוב" מאופיינת בשני רכיבים:

- אלגוריתם מפורש לחישוב קירוב לפתרון לאחר n שלבים. (בהוכחה שראינו האלגוריתם הוא חציית הקטע ולקיחת a_n כקירוב).
- הערכה לשגיאה בין הערך המקורב שמצאנו לפתרון האמיתי. (אצלנו ההערכות $a_n < c < b_n$ ו־ $|b_n - a_n| = \frac{|b-a|}{2^n}$ נותנות כי $|c - a_n| < \frac{|b-a|}{2^n}$).

תהליך השימוש בשיטת החישוב פשוט: נניח, למשל, כי $[a,b] = [0,1]$ וכי רוצים לחשב את c עם טעות קטנה מ־ $\frac{1}{1000}$.
בשלב הראשון נמצא (ע"ס (ii)) n כך ש־ $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000}$ ($n = 10$ מקיים זאת). אח"כ מחשבים, עפ"י האלגוריתם המתואר בהוכחת המשפט את a_{10}, ואז

$$|c - a_{10}| < \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}.$$

<u>דוגמאות</u>.

נביא מספר דוגמאות לשימושים במשפט ערך הביניים.
(i) נראה שלכל פולינום ממעלה אי־זוגית קיים לפחות שורש אחד.
נסמן $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ כאשר n אי־זוגי ו־ $a_n \neq 0$, ונניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $a_n > 0$. עבור $x \neq 0$ נציג

$$p(x) = x^n(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + a_n).$$

כאשר $x \to \pm\infty$ הביטוי שבסוגריים שואף ל־ a_n בעוד ש־ $x^n \to \pm\infty$ בהתאמה, ולכן $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ ו־ $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$. בפרט קיים a כך ש־ $p(a) < 0$ וקיים $b > a$ כך ש־ $p(b) > 0$. היות ופולינום הוא פונקציה רציפה אפשר להשתמש במשפט ערך הביניים עבור $\alpha = 0$ ונקבל שקיימת נקודה $a < c < b$ כך ש־ $p(c) = 0$.

(ii) המרחק בין חיפה לת"א הוא 100 ק"מ. ביום ראשון, סטודנט יוצא מת"א בזמן כלשהו לאחר 10 בבוקר ומגיע לחיפה לפני 10 בלילה. ביום חמישי הוא עוזב את חיפה אחרי 10 בבוקר ומגיע לת"א לפני 10 בלילה. האם קיים זמן t_0 כך שהוא נמצא באותה נקודה בדרך בזמן t_0 בשני הימים?
נסמן את מרחק הסטודנט מת"א בזמן t ביום ראשון ע"י $f_1(t)$ ואת מרחקו מת"א בזמן t ביום חמישי ע"י $f_2(t)$, ונגדיר $f = f_1 - f_2$. הפיזיקה אומרת לנו שהפונקציות f_1, f_2 רציפות. המתמטיקה אומרת ש־ f רציפה (כהפרש של שתי

פונקציות רציפות). אם נסמן את השעה עשר בבוקר ע"י $t = 10$ ואת השעה עשר בלילה ע"י $t = 22$ יתקיים כי

$$\begin{aligned} f(10) &= f_1(10) - f_2(10) = 0 - 100 = -100 < 0 \\ f(22) &= f_1(22) - f_2(22) = 100 - 0 = 100 > 0 \end{aligned}$$

ולפי המשפט יש $10 < t_0 < 22$ כך ש־ $f(t_0) = 0$, כלומר $f_1(t_0) = f_2(t_0)$.

<u>תרגיל.</u> תנו פתרון לא מתמטי שכל ילד יכול להבין.

(iii) התמונה של קטע ע"י פונקציה רציפה היא קטע. (הוכיחו כתרגיל!)

המשפט הבא הינו משפט עקרוני חשוב מאד. למדתם בתיכון (ונראה גם בהמשך) איך למצוא נקודות קיצון ע"י נגזרות, אך לא שאלתם שם אם לפונקציה יש בכלל נקודות כאלה. אולי נשקיע עבודה רבה, נגזור, נשווה לאפס, נגזור פעם נוספת ובסוף כל המאמץ לא נמצא כלום? המשפט מבטיח שעבור פונקציה רציפה בקטע סגור נדע <u>מראש</u> שאכן יש נקודות כאלה ושתהליך החיפוש אינו מבוצע לשווא.

<u>**משפט.**</u> [ויירשטראס] תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אז

(i) הפונקציה חסומה ב־ $[a,b]$.

(ii) הפונקציה מקבלת ב־ $[a,b]$ מכסימום ומינימום.

<u>**הוכחה.**</u> (i) נניח בשלילה ש־f אינה חסומה, ונניח, בלי הגבלת הכלליות, שהיא אינה חסומה מלמעלה. לכן, לכל n קיים $x_n \in [a,b]$ כך ש־ $f(x_n) > n$. הסדרה x_n חסומה (כי $a \le x_n \le b$) ולכן, עפ"י משפט בולצאנו־ויירשטראס, קיימת לה תת־סדרה מתכנסת $x_{n_k} \to x_0$.
היות ש־ $a \le x_{n_k} \le b$ לכל k, נקבל אותם אי־שוויונים גם עבור הגבול, כלומר $x_0 \in [a,b]$. מרציפות f נובע ש־ $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, כלומר $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) < \infty$, אולם זו סתירה לבחירת ה־ x_n־ים הנותנת כי $f(x_{n_k}) > n_k \to \infty$!

(ii) נוכיח, למשל, שהפונקציה מקבלת מכסימום. עפ"י חלק (i) הפונקציה חסומה מלמעלה, ונסמן את החסם העליון שלה ב ־ M. אם f איננה מקבלת את הערך M אז הפונקציה $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ מוגדרת היטב ורציפה כמנה של שתי פונקציות רציפות. עפ"י (i) גם g היתה צריכה להיות חסומה ־ אבל היא אינה חסומה: אם x_n נקודות בקטע כך ש־ $f(x_n) \to M$, אז $g(x_n) \to \infty$.

<u>**הערה.**</u> תנאי המשפט היו ש־ f רציפה ושהקטע סגור. בלי תנאים אלה המשפט אינו נכון. למשל, הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה בקטע החצי פתוח $(0,1]$ ואיננה חסומה בו מלמעלה. הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \le 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ מוגדרת בקטע הסגור $[0,1]$ ואינה רציפה בו. אמנם "במקרה" הפונקציה חסומה, אך היא אינה מקבלת מינימום בקטע.

****
סוף שעה 22
****

פרק 6

חשבון דיפרנציאלי

6.1 נגזרות

6.1.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

<u>**הגדרה.**</u> נאמר שפונקציה f, המוגדרת בסביבה של הנקודה a, היא גזירה בנקודה a אם הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ קיים וסופי. נסמן גבול זה ע"י $f'(a)$ ונקרא לו הנגזרת של f בנקודה a.

<u>סימונים נוספים.</u> כשנציב $x=a+h$ נקבל ש־ $x\to a$ שקול ל־ $h=x-a\to 0$ ונוכל גם לרשום את הנגזרת כגבול $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

מנת ההפרשים $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ מסומנת לעיתים ע"י $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ או $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. באופן אנלוגי נסמן לעתים את הנגזרת ע"י $\frac{df}{dx}(a)$ או $\frac{dy}{dx}(a)$, או פשוט ע"י $\frac{df}{dx}$ או $\frac{dy}{dx}$. (אך שימו לב שזהו <u>סימון בלבד</u> ואין כאן פעולת חילוק!)

בפיסיקה נהוג לסמן את הנגזרת של פונקציה $x(t)$, כשהמשתנה t מתאר זמן, ע"י $\dot{x}(t)$ או פשוט ע"י $\dot{x}$.

בהקדמה דנו בפירוש הגיאומטרי של הנגזרת כשיפוע של המשיק לגרף של הפונקציה בנקודה a (כשתארנו אותו כגבול השיפועים של מיתרים כאשר הנקודה x "מתקרבת" ל־ a). באופן כזה משוואת הישר המשיק לגרף של f בנקודה $(a,f(a))$ היא $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.

כמו כן פירשנו בהקדמה את הנגזרת כקצב השינוי של f בנקודה a, כלומר, כשינוי ה"מקומי" של f בנקודה a ביחס לשינוי של x. ראינו שתי דוגמאות: מהירות (המתארת את קצב השינוי של המיקום) ועלות שולית.

בתור דוגמא נוספת, נדון בצפיפות המסה של תייל לא הומוגני. נניח שהתייל מונח על ציר המספרים כשקצהו השמאלי בראשית, ונסמן ב־ $f(x)$ את המסה של הקטע $[0,x]$. אז $f(x)-f(a)$ מתאר את המסה של הקטע $[a,x]$. הביטוי $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ מייצג, לכן, את המסה הממוצעת ליחידת אורך בקטע זה או, במילים אחרות, את הצפיפות הממוצעת בקטע. כשנשאיף $x\to a$ נקבל כי $f'(a)$ מתאר את צפיפות המסה <u>בנקודה a</u>. היחידות של הצפיפות הן, כמובן, $\frac{\text{מסה}}{\text{אורך}}$.

דוגמאות.

(i) $f\equiv c$ קבועה. לכל נקודה a מתקיים ש־ $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=0$ ולכן $f'\equiv 0$.

(ii) $f(x)=x$. לכל נקודה a מתקיים ש־ $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$ ולכן $f'\equiv 1$.

(iii) הפונקציה $f(x)=|x|$ איננה גזירה ב־ $x=0$ מכיוון שהגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

לא קיים: הגבול מימין הוא 1 והגבול משמאל הוא -1.

באופן אינטואיטיבי, אם פונקציה גזירה בנקודה מסויימת אז הגרף שלה "חלק" שם ואין לו "חוד" בנקודה (כמו ה"חוד" של $|x|$ בנקודה $x=0$).

(iv) אם $f(x)=x^n$ כאשר n מספר טבעי, אז $f'(x)=nx^{n-1}$. כדי לראות זאת נשתמש בנוסחה

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}$$

וכשנציב $a=x+h$ ו־ $b=x$ נקבל

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\ldots+x^{n-1}\xrightarrow[h\to 0]{} nx^{n-1}\ .$$

(בהמשך נראה שנוסחה דומה $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$ נכונה לכל μ ממשי.)

<u>הערה חשובה.</u> המושג המתמטי של "משיק" הוא יותר מורכב מהאינטואיציה הראשונית. המשיק המתמטי אינו חייב להיות כולו מצד אחד של הגרף. לדוגמא $f(x)=x^3$ מקיימת $f'(x)=3x^2$ ו־ $f'(0)=0$, כלומר למשיק בנקודה 0 יש שיפוע 0 והוא מתלכד עם ציר ה־ x־ים, ומשיק זה <u>חוצה</u> את הגרף של הפונקציה (אך הוא עושה זאת "באופן משיקי")!

(v) אם $f(x)=\sin x$ אז $f'(x)=\cos x$, מכיוון שלכל נקודה a מתקיים ש

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\frac{2\cos\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}\cos a\ .$$

(השתמשנו כאן בכך ש־ $\cos\frac{2a+h}{2}\to\cos a$ ו־ $\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\to 1$).

(vi) באופן דומה $(\cos x)'=-\sin x$.

(vii) אם $f(x)=\ln x$, אז $f'(x)=1/x$. כי ניזכר ש־ $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\lambda}{n})^n=e^\lambda$ ובאופן כללי יותר $\lim_{h\to 0}(1+\lambda h)^{1/h}=e^\lambda$. לכן, אם ניקח $\lambda=\frac{1}{x}$, ונשתמש ברציפות פונקצית הלוגריתם נקבל

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\cdot h\right)^{1/h}\longrightarrow\ln e^{1/x}=\frac{1}{x}\ .$$

<u>טענה.</u> אם פונקציה f גזירה בנקודה a אז היא רציפה שם, אולם הטענה ההפוכה איננה נכונה.

<u>הוכחה.</u> צריך להוכיח כי $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, ואמנם

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

מכיוון שמנת ההפרשים שואפת ל־ $f'(a)$ ו־ $x-a$ ל־ 0.

כדי להראות שהכיוון ההפוך אינו נכון, נתבונן בפונקציה $f(x) = |x|$. זו פונקציה רציפה בכל נקודה, אך היא איננה גזירה בנקודה $x=0$.

<u>הגדרה.</u> (i) נאמר שלפונקציה f יש נגזרת חד־צדדית מימין בנקודה a אם הגבול $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ קיים. נסמן את הנגזרת מימין ע"י $f'_+(a)$.

באופן דומה נגדיר נגזרת חד־צדדית משמאל ונסמנה ב־ $f'_-(a)$. (כמובן ש־ f גזירה ב־ a אםם שתי הנגזרות החד־צדדיות $f'_+(a)$ ו־ $f'_-(a)$ קיימות והן שוות זו לזו).

(ii) נאמר ש־ f גזירה בקטע פתוח (a,b) אם היא גזירה בכל נקודה בקטע.

<u>משפט.</u> [כללי הגזירה] תהיינה f ו־ g פונקציות גזירות בנקודה a. אז גם הפונקציות הבאות גזירות ב־ a, ונגזרותיהם שם מקיימות את הנוסחאות

(i) $(cf)' = cf'$ לכל קבוע c.

(ii) $(f+g)' = f' + g'$.

(iii) $(fg)' = fg' + f'g$.

(iv) $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ בתנאי ש־ $g(a) \neq 0$.

<u>הוכחה.</u> $(i)+(ii)$ נובעים מיידית מאריתמטיקה של גבולות (הוכיחו כתרגיל).

(iii)

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &\underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} &= \frac{1}{g(x)g(a)}\Big(g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\Big) \\ &\underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{g^2(a)}\Big(f'(a)g(a) - g'(a)f(a)\Big).\end{aligned}$$

דוגמאות.

(i) $(\log_a x)' = (\frac{\ln x}{\ln a})' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

(ii) $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

6.1.2 גזירה של פונקציה מורכבת

משפט. [כלל השרשרת] תהי f פונקציה גזירה בנקודה a ותהי g פונקציה גזירה בנקודה $b = f(a)$. אז $g \circ f$ גזירה ב־ a ונגזרתה נתונה ע"י הנוסחה

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) = g'(b)f'(a) \, .$$

לביטוי $f'(a)$ במכפלה קוראים "הנגזרת הפנימית".

דוגמא.

$(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x$.

הוכחה. לא ניתן הוכחה מלאה למשפט זה, אולם המקרה בו נדון הוא המקרה העיקרי, והוא מסביר מדוע המשפט נכון.

נסמן $t = f(x)$, ואז $x \to a$ גורר, מרציפות f בנקודה a, כי $t \to b$. נגביל עצמנו כעת למקרה ש־ $f(x) \neq f(a)$ כאשר $x \neq a$, ואז נוכל לרשום

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} &= \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \frac{g(t) - g(b)}{t - b} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} g'(b)f'(a) \end{aligned}$$

כדי לקבל את ההוכחה המלאה יש גם לנתח מה קורה ל־ x־ים המקיימים $f(x) = f(a)$ (כלומר, כאשר אי אפשר לחלק ב־$(f(x) - f(a))$.

הערה. אם נרשום $t = f(x)$ ו־ $y = g(t)$ נקבל את הנוסחה

$$\frac{dy}{dx} = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(t)f'(x) = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

שבה כאילו שפשוט "הרחבנו" את השבר ב־ dt! כמובן שמדובר בסימון בלבד ואין באמת "צמצומים", אולם דוגמא זו ממחישה את החוכמה שבסימון $\frac{dy}{dx}$. נראה זאת גם בהמשך, כאשר נדבר על אינטגרלים.

שימושים לכלל השרשרת

(i) גזירה לוגריתמית. נתבונן בשלוש דוגמאות:

- נגזור את $f(x) = x^\mu$, $(x > 0)$. נציג $\ln f(x) = \mu \ln x$, נגזור את שני האגפים (השמאלי לפי כלל השרשרת) ונקבל $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\mu}{x}$. העברה באגפים והצבת הנוסחה ל־ f יתנו $f'(x) = \frac{\mu f(x)}{x} = \mu x^{\mu-1}$.
- לגזירת $y = a^x$ (כאשר $1 \neq a > 0$) נציג $\ln y = x \ln a$, וגזירת שני אגפי המשוואה תיתן $\frac{y'}{y} = \ln a$ או $y' = y \ln a = a^x \ln a$.
  בפרט, אם $a = e$ נקבל כי $(e^x)' = e^x$.
- באופן דומה אם $y = x^x$ נציג $\ln y = x \ln x$, $(x > 0)$, וכשנגזור את שני אגפי המשוואה נקבל $\frac{y'}{y} = \frac{x}{x} + \ln x = 1 + \ln x$. לכן $y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$.

(ii) קצבי שינוי למשתנים קשורים: לעיתים הקשר בין x ל־ y אינו נתון בצורה ישירה, אלא באמצעות קשר למשתנה שלישי t. כלל השרשרת מהווה כלי לחישוב הנגזרת $\frac{dy}{dt}$ מבלי שנצטרך למצוא תחילה נוסחה מפורשת של y במונחים של המשתנה t.

לדוגמא, נדמיין מיכל בצורת חרוט ניצב העומד על חודו, גובהו h והרדיוס של העיגול בקצהו העליון הוא r. מוזגים לתוך המיכל מים במהירות קבועה של $s\ \frac{cm^3}{sec}$. מהו קצב השינוי בגובה המים בזמן שגובהם הוא 5 ס"מ?

נסמן את גובה המים בזמן t ע"י $y(t)$, את רדיוס המעגל בגובה המים בזמן t ע"י $r(t)$ ואת נפח המים במיכל בזמן t ב־ $V(t)$.

עלינו לחשב את $y'(t_0)$ בזמן t_0 שבו $y(t_0) = 5$.

את הקשר בין הפונקציות $y(t)$ ו־ $r(t)$ נקבל מדמיון משולשים: $\frac{r(t)}{y(t)} = \frac{r}{h}$, כלומר $r(t) = \frac{ry(t)}{h}$, ומכאן נקבל קשר בין הפונקציות שבהן עוסקת השאלה, $V(t)$ ו־ $y(t)$: נפח המים במיכל בזמן t הוא למורה: לשרטט

$$V(t) = \frac{\pi r(t)^2 y(t)}{3} = \frac{\pi r^2 y(t)^3}{3h^2}\ .$$

קצב השינוי של נפח המים נתון: מוזגים את המים בקצב קבוע s, כלומר $V' \equiv s$. וגזירה של שני אגפי המשוואה תתן קשר בין קצב שינוי זה לקצב השינוי $y'(t)$ של $y(t)$. עפ"י כלל השרשרת נקבל

$$s = \frac{\pi r^2}{3h^2} 3y(t)^2 y'(t) = \frac{\pi r^2}{h^2} y(t)^2 y'(t)\ .$$

נציב כעת את הנתון $y(t_0) = 5$ ונקבל כי $s = \frac{\pi r^2}{h^2} 5^2 y'(t_0)$ או

$$y'(t_0) = \frac{sh^2}{25\pi r^2}\ .$$

שימו לב שהגענו לתוצאה רק ע"י ניצול הקשר בין הפונקציות ובלי שנחשב כלל את t_0 או נוסחה מפורשת עבור $y(t)$!

6.1.3 הנגזרת של הפונקציה ההפוכה

הפונקציה e^x היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה $\ln x$, ואנחנו מכירים את הנגזרת $(\ln x)' = 1/x$. נראה איך להשתמש בנוסחה זו כדי לחשב את הנגזרת של $(e^x)'$.

מהגדרת הפונקציה ההפוכה נקבל כי $\ln(e^x) = x$. נגזור את שני האגפים ונקבל ש־ $\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1$. ומכאן נחלץ $(e^x)' = e^x$.

המשפט הבא מכליל את השיטה שבה השתמשנו בדוגמא

משפט. תהי f מונוטונית ממש וגזירה בנקודה t, ונסמן $f(t) = x$. אם $f'(t) \neq 0$ אז f^{-1} גזירה בנקודה x ומתקיים

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \; .$$

הוכחה. אנו נוכיח רק את הנוסחה ולא את העובדה ש־ f^{-1} גזירה.

נרשום $f(f^{-1}(x)) = x$ ונגזור את שני האגפים (השמאלי עפ"י כלל השרשרת). נקבל ש־ $f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$ ולכן $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

הערות. (i) הנה הסבר גיאומטרי לנוסחה. הגרף של f^{-1} הינו השיקוף של הגרף של f סביב הישר $y = x$, ולכן גם המשיקים ל־ f בנקודה $(x, f(x))$ ול־ f^{-1} בנקודה $(f(x), x)$ בהתאמה מתקבלים זה מזה ע"י שיקוף כזה. גיאומטריה אלמנטרית מראה כי הזוויות α ו־ β שיוצרים המשיקים האלה עם ציר ה־x־ים מקיימות $\alpha + \beta = \pi/2$, ואז הנוסחה מתקבלת מהנוסחה הטריגונומטרית $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha}$. למורה: לשרטט

(ii) אם $f'(t_0) = 0$ אז $(f^{-1})'(x_0)$ לא קיים. ניתן לקבל זאת באופן פורמלי מהנוסחה, כי מחלקים באפס, אולם ניתן להשתכנע בזאת גם משיקולים גיאומטריים: המשיק האופקי של f עובר תחת השיקוף למשיק <u>אנכי</u> ל־ f^{-1}.

(iii) דרך טובה לזכור את הנוסחה היא לרשום $\frac{dx}{dy} = 1/\frac{dy}{dx}$. כמובן שהחישובים בשני אגפי השוויון צריכים להעשות בנקודות מתאימות.

דוגמא.

אם $f(x) = \sin x$ אז $f^{-1}(x) = \arcsin x$, ונקבל כי

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

כי $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

ניתן לקבל אותה נוסחה גם בדרך אחרת: נרשום $y = \arcsin x$, ואז $x = \sin y$ ומקבלים

$$\frac{dy}{dx} = 1\Big/\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; .$$

6.1.4 נגזרות מסדר גבוה

אם f גזירה בקטע, אז f' הינה פונקציה חדשה באותו הקטע. גם פונקציה חדשה זו יכולה להיות גזירה בנקודות מסויימות של הקטע, או אפילו בכל הקטע. נסמן את הנגזרת שלה ע"י $f'' = (f')'$ ונקרא לה הנגזרת השנייה של f. באופן אינדוקטיבי ניתן להגדיר את הנגזרת ה־ n־ית ע"י $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

לפעמים משתמשים לנגזרת ה־ n ־ית בסימון $\frac{d^n f}{dx^n}$ או $\frac{d^n y}{dx^n}$.

חוקי הגזירה של נגזרות מסדר גבוה נובעים באופן ישיר מהנוסחאות עבור נגזרת מסדר ראשון. כך $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$, ולמכפלה מקבלים נוסחה יותר מסובכת, עם מבנה דומה לנוסחת הבינום של ניוטון (הוכיחו אותה באינדוקציה)

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}$$

כאשר אנו מסמנים $f^{(0)}(x) = f(x)$. אין נוסחה פשוטה לנגזרות מסדר גבוה של מנה.

<u>**דוגמא.**</u>

$$\left(x^2 e^x\right)^{(9)} = \binom{9}{0} x^2 \left(e^x\right)^{(9)} + \binom{9}{1} 2x \left(e^x\right)^{(8)} + \binom{9}{2} 2 \left(e^x\right)^{(7)} = (x^2 + 18x + 72)e^x \ .$$

****

סוף שעה 26

****

6.2 תכונות של פונקציות גזירות

6.2.1 נקודות קיצון מקומי

נזכור שאם f מוגדרת בקטע I אז $x_0 \in I$ היא נקודת מינימום (גלובלי) אם לכל $x \in I$ מתקיים $f(x) \geq f(x_0)$. באופן דומה מגדירים נקודת מכסימום (גלובלי), ונאמר ש־ x_0 נקודת קיצון גלובלי אם f מקבלת בה מינימום גלובלי או מכסימום גלובלי.

<u>**הגדרה.**</u> נאמר כי לפונקציה f המוגדרת בקטע I יש מינימום מקומי ב־ x_0 אם קיימת סביבה $J \subset I$ של x_0 כך שלכל $x \in J$ מתקיים ש־ $f(x) \geq f(x_0)$.

באופן דומה נגדיר מכסימום מקומי, ונאמר ש־ x_0 נקודת קיצון מקומי אם f מקבלת בה מינימום מקומי או מכסימום מקומי.

<u>**משפט.**</u> [פרמה] תהי f מוגדרת בקטע I וגזירה בנקודה <u>פנימית</u> x_0. אם x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f אז $f'(x_0) = 0$.

הוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות כי x_0 הינה נקודת מינימום מקומי של f, כלומר, יש סביבה J של x_0 כך שלכל $x \in J$ מתקיים ש־ $f(x) \geq f(x_0)$. לכל $x \in J$ נסתכל במנת ההפרשים $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ונבחין בשתי אפשרויות. למורה: לשרטט

אם $x > x_0$ אז המונה אי־שלילי והמכנה חיובי, ולכן $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. אי־שוויון זה נשמר בגבול כאשר $x \to x_0$ ולכן $f'_+(x_0) \geq 0$.

אם $x < x_0$ אז המונה אי־שלילי והמכנה שלילי, ולכן $f'_-(x_0) \leq 0$. אך f גזירה ב־x_0, ולכן $0 \leq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0$, כלומר $f'(x_0) = 0$.

הערות. (i) לנקודות x שבהן $f'(x) = 0$ קוראים לפעמים נקודות קריטיות של f. התנאי $f'(x_0) = 0$ (כלומר, ש־ x_0 נקודה קריטית של f) הינו תנאי הכרחי עבור נקודת קיצון מקומי של פונקציה גזירה אך אינו מספיק, והנגזרת של פונקציה יכולה להתאפס בנקודה מבלי שתהיה נקודת קיצון מקומי. למשל, הפונקציה $f(x) = x^3$ מקיימת ש־ $f'(0) = 0$, והיא מונוטונית עולה ממש.

(ii) אין סיכוי שנוכל לאפיין בעזרת נגזרות נקודות קיצון גלובליות, כי חישוב הנגזרת בנקודה x_0 מתייחס רק לערכי f בנקודות קרובות כרצוננו ל־ x_0 ־ ולכן אם קובעים נקודה מסויימת $x_1 \neq x_0$ הנגזרת $f'(x_0)$ איננה יכולה לתת שום אינפורמציה שתוכל לאמר אם $f(x_1) \geq f(x_0)$ או $f(x_1) \leq f(x_0)$.

אף על פי כן משפט פרמה מאוד יעיל גם במציאת נקודות קיצון גלובליות. במקום לחפש נקודה כזו בין אינסוף נקודות הקטע, המשפט נותן רשימה (ובד"כ רשימה קצרה) של נקודות "חשודות" כנקודות קיצון גלובליות: נקודות הקצה של הקטע (אם הפונקציה מוגדרת בקטע סגור), נקודות בהן f איננה גזירה ונקודות פנימיות שבהן הנגזרת מתאפסת. בד"כ נוכל למצוא את נקודות הקיצון הגלובליות ע"י השוואה פשוטה בין ערכי הפונקציה המתקבלים בנקודות אלה.

(iii) לפני שמפעילים את החיפוש השיטתי המתואר ב־ (ii) יש תחילה לבדוק האם יש בכלל נקודת קיצון (דוגמא (ii) להלן מדגימה זאת!). הקיום נובע בד"כ ממשפט ווירשטראס, באופן ישיר או בעזרת נימוקים נוספים.

דוגמאות.

(i) הפונקציה $f(x) = \sqrt{|x|(1-x)}$ רציפה בקטע הסגור $[-1,1]$. על פי משפט ויירשטראס היא מקבלת שם מינימום ומכסימום (גלובליים). נמצא את כל ה"נקודות החשודות" ונשווה בין ערכי הפונקציה שמתקבלים שם. למורה: לשרטט

כאשר $0 < x < 1$ מתקיים ש־ $f(x) = \sqrt{x-x^2}$ ולכן $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$. הנגזרת מתאפסת עבור $x = 1/2$ ולכן נקבל את ה"נקודה החשודה" $x = 1/2$.

כאשר $-1 < x < 0$ מתקיים ש־ $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ ולכן $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ שאיננה מתאפסת בתחום ערכים זה.

כאשר $x = 0$ ייתכן והפונקציה כלל אינה גזירה, ולכן נוסיף לרשימת "הנקודות החשודות" את הנקודה $x = 0$ (מבלי לבדוק אפילו אם f גזירה שם או לא), וכמובן גם את קצות הקטע $x = \pm 1$.

השוואת הערכים $f(0) = f(1) = 0$, $f(-1) = \sqrt{2}$ ו־ $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ נותנת כי נקודות המינימום של הפונקציה בקטע $[-1,1]$ הן $x = 0$ ו־ $x = 1$ ונקודת המכסימום היא $x = -1$.

(ii)   נפעיל את שיטת החיפוש על הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$. הנגזרת מתאפסת בנקודות $x = \pm 1$, והשוואת הערכים בנקודות אלה תתן, לכאורה, שהמכסימום מתקבל בנקודה $x = -1$ והמינימום ב־ $x = 1$, אך אלה אינם מינימום ומכסימום גלובליים (בדקו למשל את הערכים ב־ $x = \pm 9$)! האמת היא שאין לפונקציה זו בכלל נקודות מינימום ומכסימום גלובליים. (שרטטו!)   למורה: לשרטט

6.2.2 משפט רול ומשפט לגרנז'

משפט. [רול] תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, גזירה בקטע הפתוח (a,b) ומקיימת ש־ $f(a) = f(b)$. אז קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש־ $f'(c) = 0$.

הוכחה. f רציפה ב־ $[a,b]$ ולכן, לפי משפט ויירשטראס, היא מקבלת שם מינימום m ומכסימום M.

אם $M = m$ אז הפונקציה קבועה בכל הקטע ומקיימת $f' \equiv 0$.

אם $M > m$ אז $f(a) = f(b)$ גורר שלפחות אחד מהערכים m או M חייב להתקבל בנקודה פנימית. כלומר, יש נקודה $a < c < b$ שהיא נקודת קיצון גלובלית (ובפרט מקומית) של f, ואז $f'(c) = 0$ לפי משפט פרמה.   למורה: לשרטט

הערה. באפן גיאמטרי המשפט אומר שיש נקודה $a < c < b$ שבה המשיק לגרף הוא אופקי.

דוגמא.

אם $p > 0$ אז למשוואה $x^3 + px + q = 0$ יש בדיוק שורש אחד.

נסמן $f(x) = x^3 + px + q$. זה פולינום ממעלה אי־זוגית, ולכן לפי משפט ערך הביניים יש לו לפחות שורש אחד (בדקו שאתם זוכרים את פרטי ההוכחה).

נניח כעת בשלילה כי למשוואה יש יותר מפתרון אחד, כלומר, קיימים $a < b$ כך ש־ $f(a) = f(b) = 0$. הפונקציה f מקיימת את כל תנאי משפט רול בקטע $[a,b]$ ולכן קיימת נקודה c המקיימת ש־ $f'(c) = 0$. אבל אין נקודה c כזו כי $f'(x) = 3x^2 + p > 0$ לכל x (מכיוון ש־ $p > 0$ ו־ $x^2 \geq 0$ כריבוע).

המשפט הבא מכליל את משפט רול.

משפט. [לגרנז'] תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). אז קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש־

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

או, באופן שקול, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

באופן גיאומטרי משפט לגרנז' אומר שיש נקודה $a < c < b$ שבה המשיק לגרף מקביל למיתר המחבר את הנקודות $(a, f(a))$ ו־ $(b, f(b))$ (ומשפט רול היה   למורה: לשרטט

המקרה הפרטי שהמיתר הזה היה אופקי).

__הוכחה.__ משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(a,f(a))$ ו־ $(b,f(b))$ היא

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\ .$$

נגדיר פונקצית עזר

$$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\Big(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\Big)\ .$$

הפונקציה הזו רציפה ב־ $[a,b]$, גזירה ב־ (a,b) (כהפרש של פונקציות גזירות או רציפות בהתאמה) ומקיימת ש־ $F(a)=F(b)=0$. עפ"י משפט רול קיימת $a<c<b$ כך ש־ $0=F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, וכעת נעביר אגפים.

__הערות.__ (i) משפט רול הוא המקרה הפרטי של משפט לגרנז' כאשר $f(a)=f(b)$.

(ii) הדוגמא ה"מעשית" הבאה מדגימה את האופי של השימושים הפיסיקליים של המשפט: נהג נצפה ע"י מצלמות המשטרה עוזב את ת"א בשעה 10 בבוקר ומגיע לחיפה $1/2$ שעה מאוחר יותר. האם אפשר להרשיעו בנסיעה במהירות מופרזת? הרי מהירותו לא נמדדה אף פעם! נראה איך משפט לגרנז' יעזור לבית המשפט.

נסמן את המרחק של הנהג מת"א בזמן t ע"י $f(t)$, ואז נתון כי $f(10:00)=0$ ו־ $f(10:30)=100$, ומהירותו הממוצעת של הנהג היא

$$\frac{f(10:30)-f(10:00)}{\frac{1}{2}}=\frac{100}{\frac{1}{2}}=200$$

קמ"ש. משפט לגרנז' אומר שיש נקודת זמן $10:00<c<10:30$ שבה המהירות היא $f'(c)=200$!

שימו לב שאיננו יודעים מתי הנהג נסע מהר ומתי לאט, כל מה שיודעים הוא <u>שקיימת</u> לפחות נקודת זמן אחת שבה הנהג אכן נסע במהירות מופרזת ביותר.

(iii) משפט לגרנז' הוא בעל חשיבות רבה ביותר מכיון שהוא מקשר, כפי שיראה המשפט הבא, בין תכונות מקומיות של פונקציה (תכונות של הנגזרת) לבין תכונות גלובליות שלה (כגון תחומי עלייה/ירידה וכו'). כפי שנראה בהמשך יש לו גם שימושים מתמטיים רבים אחרים.

נמשיך כעת לשימושים נוספים של משפט לגרנז', ונסיק תכונות גלובליות של פונקציה מתכונות לוקליות שלה (כלומר, מתכונות הנגזרת).

__משפט.__ תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור וגזירה בנקודות הפנימיות שלו. אזי:

(i) אם $f'\equiv 0$ אז f פונקציה קבועה.

(ii) אם $f'\geq 0$ אז f מונוטונית עולה. (ואם $f'\leq 0$ היא יורדת).

(iii) אם $f'>0$ אז f מונוטונית עולה ממש. (ואם $f'<0$ היא יורדת ממש).

__הוכחה.__ לכל $a<b$ בקטע הסגור קיימת, עפ"י משפט לגרנז', נקודה $a<c<b$ כך ש־ $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

(i) היות ש־ $f'(x)=0$ בכל נקודה פנימית בקטע, אז גם $f'(c)=0$, ולכן $f(b)=f(a)$. ומכיוון ש־ a ו־ b היו שרירותיים נובע שהפונקציה קבועה.

(ii) אם $f'(x)\geq 0$ בכל נקודה פנימית בקטע, אז $f'(c)\geq 0$, ולכן $f(b)\geq f(a)$. ומכיוון ש־ a ו־ b היו שרירותיים נובע שהפונקציה מונוטונית עולה.

(iii) היות ש־ $f'(x)>0$ בכל נקודה פנימית בקטע, אז $f'(c)>0$, ולכן $f(b)>f(a)$. ומכיוון ש־ a ו־ b היו שרירותיים נובע שהפונקציה מונוטונית עולה ממש.

הערות. (i) בחלקים (i) ו־ (ii) נכונים גם המשפטים ההפוכים. (הוכיחו, למשל שאם f מונוטונית עולה וגזירה אז $f'\geq 0$).
המשפט ההפוך ל־ (iii) איננו נכון: $f(x)=x^3$ עולה ממש אך $f'(0)=0$.

(ii) בחלקים (ii) ו־ (iii) של המשפט אפשר להחליש קצת את תנאי המשפט ולהניח רק ש־ f רציפה ומקיימת $f'(x)\geq 0$ (או $f'(x)>0$ בהתאמה) פרט למספר סופי של נקודות (שבהן f אולי איננה גזירה אפילו).
נניח שהנקודות הן $a=a_0<a_1<\ldots<a_n=b$, ואז עפ"י המשפט f מונוטונית עולה (או מונוטונית עולה ממש) בכל קטע חלקי $[a_{i-1},a_i]$. ואם $x<a_i<y$ נקבל לכן כי $f(x)\leq f(a_i)\leq f(y)$ במקרה (ii), וכי $f(x)<f(a_i)<f(y)$ במקרה (iii).

דוגמאות.

(i) אם $f(x)=\arctan(x)$ אז $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$ ולכן f מונוטונית עולה ממש.

(ii) אם $f(x)=1/x$ אז $f'(x)=-1/x^2<0$, אך $f(-1)<f(1)$, כלומר f אינה יורדת. זה אינו סותר את המשפט כי f אינה רציפה ב־ $x=0$ ולכן לא מקיימת את תנאי המשפט.

(iii) המשפט מאוד שימושי בהוכחת אי שוויונים. נוכיח למשל כי

$$\ln(1+x)\geq\frac{x}{1+x}\qquad \text{לכל}\qquad x>0\ .$$

נגדיר $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$ ונשים לב כי $f(0)=0$, ולכן אי השוויון ינבע אם שנראה ש־ f עולה ממש ב־ $[0,\infty)$. ובאמת

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}$$

ומנה זו חיובית עבור $x>0$.

6.2.3 תנאי מספיק לנקודת קיצון

משפט פרמה אומר שאם x_0 היא נקודת קיצון מקומית של פונקציה גזירה, אז בהכרח $f'(x_0) = 0$, וראינו שתנאי זה אינו מספיק (למשל $f(x) = x^3$ בנקודה $x_0 = 0$). נחפש כעת תנאים מספיקים לכך ש־ x_0 היא נקודת קיצון מקומית (אך נשים לב שתנאים מספיקים אלה לא יהיו הכרחיים).

__משפט.__ תהי f מוגדרת בסביבת הנקודה x_0 כך ש־ f עולה מימין ל־ x_0 (כלומר, יש $b > x_0$ כך ש־ f עולה בקטע $[x_0, b]$) ויורדת משמאל לה (כלומר, יש $a < x_0$ כך ש־ f יורדת בקטע $[a, x_0]$). אז יש ל־ f מינימום מקומי ב־ x_0. בפרט הדבר נכון אם f גזירה בסביבה (פרט אולי לנקודה x_0 עצמה שבה מספיק שתהיה רציפה) כך ש־ $f' \geq 0$ בסביבה ימנית של x_0 ו־ $f' \leq 0$ בסביבה שמאלית שלה. (וטענה אנלוגית נכונה למכסימום מקומי).

__הוכחה.__ החלק הראשון ברור, והשני נובע ממנו כי $f' \geq 0$ ו־ $f' \leq 0$ מבטיחים בהתאמה עליה או ירידה של f.

__דוגמא.__

אם $f(x) = (x-1)(x+1)^2$ אז $f'(x) = (x+1)(3x-1)$ והנגזרת מתאפסת עבור $x = -1;\ 1/3$. הסימנים של הנגזרת הם $(+,-,+)$ ולכן $x = -1$ היא נקודת מכסימום מקומי ו־ $x = \frac{1}{3}$ נקודת מינימום מקומי.

אם f גזירה פעמיים בסביבת x_0 ומקיימת $f'(x_0) = 0$ ו־ $f''(x_0) \neq 0$, אז f' בהכרח משנה סימן ב־ x_0. כי נניח, למשל, ש־ $f''(x_0) > 0$. אז מהגדרת הנגזרת השניה נובע ש־ $\frac{f'(x_0+t) - f'(x_0)}{t} > 0$ עבור $|t| > 0$ מספיק קטן, אבל $f'(x_0) = 0$ ולכן מקבלים כי $f'(x_0 + t) > 0$ עבור $t > 0$ קטן מספיק ו־ $f'(x_0 + t) < 0$ עבור $t < 0$ קטן מספיק בערכו המוחלט. כך קבלנו את המסקנה הבאה

__מסקנה.__ תהי f גזירה פעמיים ב־ x_0 ומקיימת $f'(x_0) = 0$ ו־ $f''(x_0) \neq 0$. אז x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f. מכסימום מקומי אם $f''(x_0) < 0$ ומינימום מקומי אם $f''(x_0) > 0$.

__הערה.__ x_0 יכולה להיות נקודת קיצון מקומי גם אם $f''(x_0) = 0$. לדוגמא, ל־ $f(x) = x^4$ יש נקודת מינימום מקומי (וגלובלי) ב־ $x = 0$, אך $f''(0) = 0$.

6.2.4 בעיות מינימום־מכסימום ואי־שוויונים

נביא כעת דוגמאות לשימושים של המשפטים שהוכחנו.

(i) מיצאו נקודה על הקרן האי־שלילית של ציר y שממנה רואים את הקטע $[1, 2]$ שעל ציר x בזווית ראייה מקסימלית.

הזווית היא

$$f(y)=\begin{cases}\arctan(2/y)-\arctan(1/y) & y>0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

(ונשים לב כי פונקציה זו רציפה ב־ $y=0$). נחשב

$$f'(y)=\frac{1}{1+(2/y)^2}\cdot\frac{-2}{y^2}-\frac{1}{1+(1/y)^2}\cdot\frac{-1}{y^2}$$

ונפתור את המשוואה $f'(y)=0$. נקבל $2y^2+2=y^2+4$, ולכן $y=\sqrt{2}$ (מכיוון שדרשנו $y\geq 0$).

נשאלת השאלה האם זו אכן נקודת מכסימום, ונשים לב שהתשובה לשאלה תהיה חיובית אם נצליח להראות שבכלל יש ל־ f מכסימום: הפונקציה f חיובית לכל $y>0$ ו־ $f(0)=0$, ולכן נקודת המכסימום y_0 חייבת להיות חיובית ממש. ע"ס משפט פרמה צריך להתקיים בה $f'(y_0)=0$, אולם $y_0=\sqrt{2}$ היתה הנקודה היחידה בה f' התאפסה ולכן זוהי נקודת המכסימום של f!

קיום המכסימום נובע מהטענה הבאה המכלילה את משפט ווירשטראס

למורה: להוכיח רק בשרטוט

טענה. תהי f רציפה בקרן $[0,\infty)$ כך ש־ $f(0)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. אז f מקבלת מכסימום גלובלי בקרן.

הוכחה. אם $f(x)\leq 0$ לכל $x\geq 0$ אז ערך המכסימום הגלובלי הינו $f(0)=0$ וסיימנו את ההוכחה. לכן נוכל להניח שיש x_1 כך ש־ $f(x_1)>0$ ונסמן $\varepsilon=f(x_1)$. עפ"י הגדרת גבול באינסוף יש $K>0$ כך ש־ $f(x)<\varepsilon$ לכל $x>K$, וע"ס הבחירה $\varepsilon=f(x_1)$ בוודאי ש־ $x_1\leq K$.

הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[0,K]$, ולכן עפ"י משפט ווירשטראס היא מקבלת שם מכסימום, שנסמנו ב־ M, ונראה ש־ M הוא למעשה מכסימום בכל הקרן $[0,\infty)$. ובאמת, אם $x\leq K$ אז בוודאי ש־ $f(x)\leq M$ עפ"י הגדרת M. ואם $x>K$ אז $f(x)<\varepsilon=f(x_1)\leq M$ (כי $x_1\leq K$).

מומלץ לקרוא!

(ii) נשתמש בכלים מתמטיים על מנת להוכיח את עקרון החזרת האור: קרן אור הפוגעת במראה מוחזרת בזווית β השווה לזווית α של הפגיעה במראה.

נבחר קואורדינטות כך שהמראה נמצאת על ציר x ומקור האור נמצא בחלקו החיובי של ציר y (בנקודה $A=(0,h)$). נבחר נקודה B שנמצאת על הקרן המוחזרת מהמראה, ולשם פשטות נניח שצורתה $B=(b,h)$, כלומר, שהיא נמצאת באותו הגובה h כמו הנקודה A. נעזר כעת בעקרון פיזיקלי בסיסי: קרן האור "בוחרת" לנוע במסלול הקצר ביותר היוצא מ־ A פוגע במראה, ומגיע ל־ B. לכן בנקודת הפגיעה במראה, שנסמנה ב־ $(x_0,0)$, יתקיים שהפונקציה $f(x)=\sqrt{h^2+x^2}+\sqrt{h^2+(x-b)^2}$ מקבלת מינימום. נחשב

$$0=f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{h^2+x^2}}-\frac{2(b-x)}{2\sqrt{h^2+(x-b)^2}}$$

או

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{b-x}{\sqrt{h^2+(x-b)^2}}=\cos\beta$$

כלומר, $\alpha=\beta$.

כמו בכל בעית מינימום/מכסימום, עלינו לוודא שזו אכן נקודת מינימום. ואכן, חישובים פשוטים נוספים (שלא נבצע אותם) מראים שהפתרון למשוואה הרשומה למעלה הינו $x=b/2$, ושהפונקציה יורדת כאשר $x<b/2$ ועולה כאשר $x>b/2$.

ניתן גם לנמק שזו אכן נקודת מינימום ע"י שיקולים דומים לתרגיל הקודם: יש ל־ f מינימום בקטע $[0,b]$ כי היא רציפה והקטע סגור. ומכיוון שיש רק "נקודה קריטית" אחת, המינימום חייב להתקבל בה.

הערה. ניתן להוכיח את חוק החזרת האור גם ללא חשבון דיפרנציאלי. נשקף את B ל־ B' מצדו האחר של ציר ה־x, ואז האורך של כל מסלול היוצא מ־ A פוגע במראה, ומגיע ל־ B הוא כמו האורך של המסלול מ־ A ל־ B' המתקבל ממנו ע"י שיקוף במראה של החלק שאחרי נקודת הפגיעה. אך המסלול הקצר ביותר בין A ל־ B' הוא הקטע הישר בינהן.

(iii) מיצאו נקודה B על הישר $y = x + 2$ שהיא הקרובה ביותר לנקודה $A = (-1, 0)$.

נסמן ב־ $d(x) = \sqrt{(x+1)^2 + (x+2)^2}$ את המרחק של הנקודה הכללית $(x, x+2)$ על הישר מההנקודה A. במקום למצוא את נקודת המינימום של $d(x)$ יהיה לנו פשוט יותר למצוא את נקודת המינימום של הפונקציה

$$f(x) = d^2(x) = (x+1)^2 + (x+2)^2$$

שזו, כמובן, אותה נקודה. נפתור לכן את המשוואה $0 = f'(x) = 4x + 6$ ונקבל $x = -\frac{3}{2}$. לכן $B = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ (והוכיחו שזה אכן מינימום!).

שימו לב שהוקטור $B - A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ניצב לישר L. זו, כמובן, תופעה כללית ולכל ישר L ונקודה $A \notin L$, הנקודה $B \in L$ שהינה הקרובה ביותר ל־ A מקיימת שהוקטור $B - A$ ניצב ל־ L (הוכיחו כתרגיל).

(iv) הוכיחו כי $x \arctan x > \ln \sqrt{1 + x^2}$ לכל $x \neq 0$.

נגדיר $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$ ונשתמש בנגזרת על מנת "לחקור" את f ולהסיק ש־ $f(x) > 0$ לכל $x \neq 0$. חישוב ישיר מראה ש־ $f'(x) = \arctan x$ ולכן הנגזרת שלילית עבור $x < 0$ וחיובית עבור $x > 0$, ויש ל־ f מינימום ממש בנקודה $x = 0$. אך $f(0) = 0$ ולכן $f(x) > 0$ לכל $x \neq 0$.

(v) הדוגמא הבאה היא בעלת אופי דומה. נוכיח כי

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x} \qquad \text{לכל} \qquad x > -1 \; .$$

נגדיר $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ ונשים לב כי $f(0) = 0$. אי השוויון ינבע מייד כשנראה ש־ f יורדת בקטע $(-1, 0]$ ועולה ב־ $[0, \infty)$. ובאמת

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

ומנה זו חיובית עבור $x > 0$ ושלילית עבור $x < 0$.

(vi) הוכיחו כי $\sin x > x - x^3/6$ לכל $x > 0$.

נגדיר $f(x) = \sin x - x + x^3/6$ ונחקור את התנהגותה. $f(0) = 0$ ולכן אם נראה ש־ $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$ נקבל שהפונקציה מונוטונית עולה ממש עבור $x > 0$ ומכאן שהיא חיובית. כלומר, די אם נראה שלכל $x > 0$

$$f'(x) = \cos x - 1 + x^2/2 > 0 \; .$$

קיבלנו פונקציה f' שמקיימת $f'(0) = 0$, ולכן די אם נראה שנגזרתה מקיימת $(f')'(x) = f''(x) > 0$ לכל $x > 0$. כלומר, עלינו לבדוק אם

$$f''(x) = -\sin x + x > 0$$

לכל $x > 0$. וזה אכן נכון כי ידוע ש־ $\sin x < x$ לכל $x > 0$.

****

סוף שעה 31

****

6.3 כלל לופיטל

6.3.1 כלל לופיטל

כלל לופיטל הינו כלי חשוב לחישוב גבולות שכללי האריתמטיקה הרגילים אינם מספיקים לחישובם, כמו גבולות מהצורה "$\frac{0}{0}$" ו־ "$\frac{\infty}{\infty}$".

משפט. תהיינה f ו־ g פונקציות מוגדרות וגזירות בסביבה מנוקבת של a ומקיימות את התנאים הבאים

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

(ii) $g'(x) \neq 0$ בסביבה.

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים ושווה ל־ L.

אז גם הגבול $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה ל־ L.

הוכחה. ההוכחה של המקרה הכללי קצת מסובכת, ולכן נסתפק רק בהוכחת מקרה פרטי: נוכיח את המשפט תחת ההנחות הנוספות ש־ f ו־ g מוגדרות, רציפות וגזירות גם בנקודה a, ש־ f' ו־ g' רציפות ב־ a וש־ $g'(a) \neq 0$. מקרה זה "מכסה" את רוב השימושים המעשיים במשפט (אך ראו הערה (i) בהמשך).

תחת התנאים הנוספים הנחות המשפט נותנות כי

$(i)'$ $f(a) = g(a) = 0$.

$(ii)'$ $g'(a) \neq 0$.

$(iii)'$ $\frac{f'(a)}{g'(a)} = L$.

ואמנם, $(i)'$ נובע מ־ (i) ומרציפות f ו־ g ב־ a. ואילו $(iii)'$ נובע מ־ (iii) ומרציפות f' ו־ g' ב־ a.

עלינו להוכיח שגם $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$, ואמנם, ע"ס $(i)'$ מתקיים

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Big/ \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

וביטוי זה שואף ל־ $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ עפ"י הגדרת הנגזרת ואריתמטיקה של גבולות.

דוגמא.

$\lim_{x\to 0}(1-\cos^3 x) = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$, ולכן שימוש בלופיטל יתן

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x \sin x}{\cos x} = 0 \,.$$

הערות. (i) ברוב השימושים המעשיים במשפט ההנחות הנוספות מתקיימות. ההנחה העיקרית שלעתים איננה מתקיימת היא ש־ $g'(a) \neq 0$. במקרים רבים

(ראו למשל הערה (iv) להלן) גם $f'(a)=g'(a)=0$ ואז אנחנו משתמשים בלופיטל פעם נוספת. אך במקרה כזה $(ii)'$ לא מתקיים ואי אפשר להשתמש, כפי שעשינו בהוכחה, באריתמטיקה של גבולות. במקרים כאלה נשתמש בניסוח הכללי של המשפט למרות שלא הוכחנו אותו.

(ii) אותן מסקנות נכונות גם כשמדובר בגבול חד־צדדי בנקודה a, או אם a מוחלף ב־∞, או אם $\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a} g'(x)=\pm\infty$ (אולם נדרשות הוכחות נפרדות עבור חלק מהמקרים השונים).

(iii) כלל לופיטל נכון רק כאשר הוא נחוץ באמת: כלומר, כאשר הגבול של f/g הוא מהצורה $0/0$ או ∞/∞. בכל שאר המקרים נחשב את הגבול באופן ישיר בלי להשתמש בכלל לופיטל. שימוש במשפט במקרים כאלה יכול אפילו לתת תוצאות לא נכונות! לדוגמא, ברור ש־ $\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{1+2x}=1$, אולם שימוש (שגוי ואסור!) בלופיטל היה נותן $1/2$.

(iv) אם גזרנו וקיבלנו ש־ $\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a} g'(x)=0$, אנו יכולים להשתמש בלופיטל שוב ולחשב את $\lim_{x\to a} f''(x)$ ו־ $\lim_{x\to a} g''(x)$. אם גם $\lim_{x\to a} f''(x)=\lim_{x\to a} g''(x)=0$, נמשיך לגזור עד המספר הטבעי n הקטן ביותר כך ש־ $\lim_{x\to a} g^{(n)}(x)\neq 0$ ואז $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$. (הערה דומה תקפה גם עבור שאר ה"וריאציות" של כלל לופיטל). לדוגמא

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2 .$$

(v) המשפט אומר שכאשר הגבול של f'/g' קיים אז גם הגבול של f/g קיים ושניהם שווים. הטענה ההפוכה אינה נכונה. למשל, עבור $f(x)=x^2\sin(1/x)$ ו־ $g(x)=\sin x$ נקבל

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=0$$

כי $x\sin(1/x)\to 0$ ו־ $\frac{x}{\sin x}\to 1$. אך למנה $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x\sin(1/x)-\cos(1/x)}{\cos x}$ אין בכלל גבול בנקודה $x=0$.

גם כאן, כמו שכבר ראינו בהערה (iii), הכלל הוא נוח מאוד: מותר להשתמש במשפט לופיטל רק כשצריך אותו.

(vi) לפעמים יש צורך להשתמש בכלל לופיטל בשילוב עם עוד שיטות. למשל

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{e^x-1} .$$

אם ננסה להשתמש בלופיטל שוב ולהמשיך לגזור נקבל רק ביטויים מסובכים וארוכים. אך נשים לב כי $3\cos^2 x\to 3$, ולכן נחשב עפ"י לופיטל רק את

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x}=1$$

ונסיק מאריתמטיקה של גבולות כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}3\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}=3\cdot 1=3 .$$

דוגמאות.

(i) לפעמים ניתן להשתמש בכלל לופיטל עבור ביטויים מהצורה של "$\infty-\infty$". למשל

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\big(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\big) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0\end{aligned}$$

(ii) ע"י שימוש בלוגריתמים אפשר גם לחשב גבולות של ביטויים בעייתיים עם חזקות. למשל, על מנת לחשב את הגבול $\lim_{x\to 0^+}x^x$ (שהינו מהצורה "0^0") נחשב במקום זאת את הגבול

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x^x)=\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

וכעת נשתמש ב- $x^x=e^{\ln(x^x)}$ ונקבל $\lim_{x\to 0^+}x^x=e^{\lim_{x\to 0^+}\ln(x^x)}=e^0=1$.

(iii) נחשב את $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\sin x}$. זו דוגמא נוספת לשימוש בלופיטל על מנת לחשב גבולות של ביטויים עם חזקות (כאשר כאן הגבול מימין הוא מהצורה "1^∞" והגבול משמאל מהצורה "$1^{-\infty}$"). ניקח לוגריתם של הביטוי ונקבל

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{\cos x}=1\ .$$

אך $(1+x)^{1/\sin x}=e^{\ln(1+x)^{1/\sin x}}$ ולכן $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\sin x}=e^1=e$.

(iv) כאשר מנסים לחשב גבול באמצעות לופיטל, יש למצוא מהי הדרך ה"טובה ביותר" להציג את הביטוי הנתון כשבר מהצורה f/g. לדוגמא, אם ננסה להשתמש בכלל לופיטל על $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}$ בצורתו המקורית נקבל $\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$, וזה ביטוי אפילו יותר מסובך מהביטוי המקורי! אולם, אם נרשום את הביטוי של הגבול המבוקש באופן אחר, הפתרון יהיה פשוט

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{e^{1/x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-1/x^2}{-\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2e^{1/x^2}}=0\ .$$

באופן דומה ניתן להראות כי $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{p(x)}=0$ לכל פולינום $p(x)$.

6.3.2 סדרי גודל וקצב התכנסות של פונקציות

לעתים צריך להשוות שתי פונקציות ששואפות ל־ 0 או ל־ ∞, ורוצים לקבוע מי שואפת "יותר מהר". כך למשל העובדה ש־ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^5+8x+1}=0$ אומרת שהביטוי x^5+8x+1 שואף לאינסוף "יותר מהר" מאשר x^2+3.

לעומת זאת $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ אומר ש־ x ו $\sin x$ שואפים בנקודה 0 לאפס "באותה מהירות".

אנחנו נאמר לפעמים כי באינסוף x^2+3 היא מסדר גודל קטן יותר מאשר x^5+8x+1.

נוח להשתמש ב"סקלות" של פונקציות מוכרות ולבדוק את מהירות השאיפה לאפס או לאינסוף ביחס לאברי הסקלה. לעתים קרובות עושים השוואה עם המשפחה $\{(\log x)^\alpha:\alpha>0\}$ (הסקלה הלוגריתמית), או עם $\{x^\alpha:\alpha>0\}$ (הסקלה הפולינומיאלית) או עם $\{e^{\alpha x}:\alpha>0\}$ (הסקלה המעריכית).

כך למשל x^2+3 היא מאותו סדר גודל באינסוף כמו x^2 ואילו x^5+8x+1 כמו x^5.

שלוש הסקלות האלה בודקות מהירויות שאיפה שונות. כך, כשבודקים את מהירות השאיפה לאינסוף באינסוף, אז כל אברי הסקלה הלוגריתמית "איטיים יותר" מאברי הסקלה הפולינומיאלית, ואלה "איטיים" מאברי הסקלה המעריכית.

נראה למשל כי $\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ לכל $\alpha,\beta>0$.

נבחר n שלם כך ש־ $n\geq\alpha$, וע"י הגדלת המונה די להראות כי $\frac{x^n}{e^{\beta x}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$.

וזה נובע משימוש בלופיטל n פעמים.

חישוב דומה מראה כי $\frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ לכל $\alpha,\beta>0$.

לפעמים משתמשים בסימונים הבאים:

אם $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, כלומר f מ"סדר גודל" קטן יותר מאשר g בנקודה a, נסמן זאת ע"י $f(x)=o(g(x))$ כאשר $x\to a$ ("או קטן").

אם יש קבוע K כך ש־ $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leq K$ בסביבת a (כלומר, סדר בגודל של f הוא לכל היותר כמו של g), נאמר כי $f(x)=O(g(x))$ כאשר $x\to a$ ("או גדול ").

באותם סימונים משתמשים כאשר במקום $x\to a$ לוקחים $x\to\infty$.

6.4 פונקציות קמורות

<u>הגדרה.</u> (הגדרה גיאומטרית לקמירות) תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I. נאמר ש־ f קמורה ב־ I אם כל מיתר המחבר איזשהן שתי נקודות על הגרף שלה נמצא כולו מעל הגרף.

f תקרא קעורה בקטע I אם המיתרים לגרף שלה נמצאים מתחת לגרף.

הפונקציה f תקרא קמורה (או קעורה) ממש בקטע אם המיתרים נמצאים ממש מעל (או מתחת) לגרף ־ פרט לשתי נקודות החיתוך עם הגרף.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הפונקציה $f(x)=x^2$ קמורה ממש ב־ $(-\infty,\infty)$ ו־ $g(x)=x^3$ קמורה ממש ב־ $[0,\infty)$.

(ii) פונקציה לינארית היא גם קמורה וגם קעורה (וכמובן, לא ממש).

המשפט הבא מפרט תכונות ואיפיונים של פונקציות קמורות. משפט אנלוגי נכון גם לפונקציות קעורות. את רוב חלקי המשפט לא נוכיח, אך חשוב שתשכנעו את עצמכם ע"י הסתכלות בדוגמאות שהתנאים הגיאומטריים (i) ו־ (ii) אכן מתקיימים.

משפט. (i) תהי f גזירה בקטע I. אז f קמורה ב־ I אםם לכל $a \in I$ המשיק לפונקציה בנקודה a נמצא כולו מתחת לגרף שלה, כלומר $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$ לכל $x \in I$.

(ii) תהי f גזירה בקטע I. אז f קמורה ב־ I אםם f' היא פונקציה מונוטונית עולה ב־ I. אם f' מונוטונית עולה ממש ב־ I אז f קמורה ממש.

(iii) (קל לאימות ושימושי מאוד) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע I. אזי f קמורה ב־ I אםם $f'' \geq 0$ ב־ I. אם $f''(x) > 0$ בכל נקודה פנימית $x \in I$ אז f קמורה ממש ב־ I.

הוכחה. נראה רק שסעיף (iii) נובע מ־ (ii). ואמנם, עפ"י (ii) הפונקציה f קמורה אםם f' מונוטונית עולה, אך לפי משפט קודם, זה קורה אםם נגזרתה, $(f')' = f''$, היא אי שלילית.

באופן דומה, אם $f''(x) > 0$ בכל נקודה פנימית $x \in I$ אז $f'(x)$ מונוטונית עולה ממש, ולכן f קמורה ממש.

דוגמאות.

(i) $(e^x)'' = e^x > 0$ לכל x, ולכן e^x היא פונקציה קמורה ממש ב־ $(-\infty, \infty)$.

(ii) ניקח מספר ממשי $p > 1$, ואז מתקיים ש־ $(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$ לכל $x > 0$ ולכן $f(x) = x^p$ קמורה ממש בקרן $[0, \infty)$. אם p שלם אז f מוגדרת גם בקרן $(-\infty, 0]$, והיא קמורה שם כאשר p זוגי וקעורה כשהוא איזוגי.

(iii) זכרו שפונקציה קמורה איננה חייבת להיות גזירה, וכמובן שכאשר f אינה גזירה לא נוכל להשתמש בקריטריונים הנעזרים בנגזרות. למשל, הפונקציה $f(x) = -|x|$ היא קעורה למרות שבכל נקודה x שבה f גזירה פעמיים מתקיים ש־ $f'' = 0 \geq 0$!

(iv) פונקציות קמורות וקעורות מופיעות באופן טבעי במודלים שונים בתחומי המדע וההנדסה. הנה דוגמא כזו מתחום הכלכלה.

נסמן ב־ $f(x)$ את עלות הייצור של x יחידות ממוצר כלשהו. עקרון בסיסי בכלכלה, "עקרון העלות השולית הפוחתת", אומר שבתנאים מאוד כלליים ורחבים יש "יתרון לגודל" והעלות של ייצור יחידה אחת נוספת של המוצר הולכת וקטנה ככל שרמת הייצור גדלה (כלומר כאשר x גדל). בשפה מתמטית זה אומר שהעלות השולית, כלומר $f'(x)$, היא פונקציה מונוטונית יורדת. ולפי המשפט f חייבת להיות קעורה!

וקבלנו תופעה מעניינת: עקרונות כלליים של תורת הכלכלה מכתיבים קמירות או קעירות של הפונקציות המופיעות במודלים כלכליים מסויימים!

6.4.1 שרטוט גרפים

השימוש בנגזרות נותן לנו אינפורמציה רבה על צורת הגרף של פונקציה ־ תחומי עלייה וירידה, נקודות מינימום ומכסימום מקומיים וגלובאליים ותחומי קמירות וקעירות. נדון כעת בשני מושגים נוספים.

<u>הגדרה.</u> תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה a. נאמר ש־ a היא נקודת פיתול של f אם יש בנקודה מעבר בין תחום קמירות של הפונקציה לתחום קעירות שלה. כלומר, f קמורה בסביבה שמאלית של a וקעורה בסביבה ימנית שלה ־ או להפך.

ברור שאם f גזירה פעמיים ו־ f'' משנה סימן ב־ a אז a נקודות פיתול ־ ובהכרח $f''(a) = 0$. אך ההגדרה היא גיאומטרית, ואין צורך בכלל ש־ f תהיה מוגדרת, או רציפה, או גזירה בנקודה.

<u>דוגמאות.</u>

(i) $f(x) = x^3$. כאן $f''(x) = 6x$ חיובית בקרן $(0, \infty)$ (ולכן f קמורה שם) ושלילית ב־ $(-\infty, 0)$ (ולכן f קעורה שם), ולכן $a = 0$ נקודת פיתול.

(ii) $f(x) = 1/x$ עבור $x \neq 0$. גם כאן $f''(x) = 2/x^3$ חיובית בקרן $(0, \infty)$ ושלילית ב־ $(-\infty, 0)$, ולכן $a = 0$ נקודת פיתול למרות ש־ f אינה מוגדרת בה כלל.

<u>הערה.</u> <u>זהירות!</u> ההגדרה של נקודת פיתול <u>איננה</u> ש־ $f''(a) = 0$. כבר ראינו נקודת פיתול שבה f אינה מוגדרת כלל, והפונקציה $f(x) = x^4$ היא קמורה, ולכן אין לה נקודות פיתול ־ ובכל זאת $f''(0) = 0$.

<u>הגדרה.</u> אם $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0$ אז הישר $y = ax + b$ נקרא אסימפטוטה של f ב־ ∞. (לדוגמא, ציר ה־ x מהווה אסימפטוטה ל־ $f(x) = 1/x$ ב־ ∞). באופן דומה מגדירים אסימפטוטה של f ב־ $-\infty$.
אם $\lim_{x\to a^+} |f(x)| = \infty$ נקרא לישר האנכי העובר דרך הנקודה $(a, 0)$ אסימפטוטה אנכית מימין של f ב־ a. באופן דומה מגדירים אסימפטוטה אנכית משמאל. (לדוגמא, ציר ה־ y מהווה אסימפטוטה של $f(x) = 1/x$ ב־ 0).

אם $y = ax+b$ הוא אסימפטוטה של f ב־ ∞ אז $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b) = 0$ ומכאן נקבל נוסחאות ל־ a ו־ b:

חישוב a. מחילוק $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0$ ב־ x נקבל $\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \to 0$. אך $\frac{b}{x} \to 0$ ולכן $a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

חישוב b. ברור כי $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$.
חישוב קל מראה שאם הגבולות בנוסחאות האלה קיימים אז הישר $y = ax+b$ (עבור ה־ a, b שהן נותנות) הוא אכן אסימפטוטה של f ב־ ∞.

<u>דוגמא.</u>

נחקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ (ונשרטט את הגרף שלה).

- f מוגדרת ורציפה לכל x כמנה של פונקציות רציפות, כאשר הפונקציה שבמכנה איננה מתאפסת.
- f אי־זוגית מכיוון ש־ $f(-x)=\frac{-x}{1+x^2}=-f(x)$ לכל x.
- נקודת החיתוך היחידה של f עם הצירים היא הנקודה $(0,0)$.
- $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ולכן f מונוטונית עולה כאשר $x\in(-1,1)$ ומונוטונית יורדת כאשר $x<-1$ או $x>1$. הנקודות $(-1,-1/2)$ ו־ $(1,1/2)$ הן נקודות מינימום מקומי ומכסימום מקומי בהתאמה.
- $\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0$, ולכן הנקודות $(-1,-1/2)$ ו־ $(1,1/2)$ הן, למעשה, נקודות המינימום והמכסימום הגלובאליים בהתאמה.
- $f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$ ולכן f'' משנה סימן ב־ $x=\pm\sqrt{3}$ וב־ $x=0$. אלה נקודות הפיתול של f, והיא קעורה ב־ $(-\infty,-\sqrt{3}]$ ו־ $[0,\sqrt{3}]$, וקמורה ב־ $[-\sqrt{3},0]$ ו־ $[\sqrt{3},\infty)$.
- כדי למצוא אסימפטוטות ב־ $\pm\infty$ נחשב

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=0 \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+x^2}=0 \end{aligned}$$

למורה: לשרטט

לכן יש אסימפטוטה ב־ $\pm\infty$, והיא הישר $L(x)\equiv 0$.

השתמשו כעת באינפורמציה שקבלנו ושרטטו את הגרף של f.

****

סוף שעה 34

****

6.5 משפט טיילור

6.5.1 קירוב לינארי

לומר ש־ f רציפה בנקודה a זה כמו לומר ש־ f היא "כמעט קבועה" בסביבת a: הרציפות אומרת שערכי f מאוד "קרובים" ל־ $f(a)$ כאשר x "קרוב" ל־ a. באופן מתמטי רציפות ב־ a פירושה שאם מציגים

$$f(x)=f(a)+e(x)$$

כאשר $e(x)=f(x)-f(a)$ הוא השגיאה בהערכת $f(x)$ ע"י הקבוע $f(a)$, אז שגיאה זו היא קטנה כאשר x קרוב ל־ a: $\lim_{x\to a}e(x)=0$.

הגרף של פונקציה קבועה הוא קו ישר אופקי, ומתקבל על הדעת שאם נרשה קווים ישרים שאינם בהכרח אופקיים נוכל לקבל קירובים טובים יותר (כלומר, שגיאה קטנה יותר). כאשר מנסים לשרטט קירוב כזה (שרטטו!) מגלים מהר כי הקו הישר "הטוב ביותר" הוא הישר המשיק לפונקציה בנקודהת: ישר זה מתייחס לא רק לערך הפונקציה ב־ a, אלא גם ל"כיוון" של הגרף. נראה כעת מה זה אומר באופן מתמטי.

משוואת הישר עם שיפוע m העובר דרך נקודה (a,b) היא $y=b+m(x-a)$.
אם f גזירה ב־ a, אז השיפוע של הישר המשיק לגרף בנקודה $(a,f(a))$ הוא $f'(a)$ ומשוואת הישר המשיק היא $y=f(a)+f'(a)(x-a)$. נציג לכן

$$f(x)=\Big(f(a)+f'(a)(x-a)\Big)+\alpha(x)$$

כאשר $\alpha(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ הינו "השגיאה" שאנו עושים כאשר אנו מקרבים את הגרף של f ע"י הישר המשיק.

6.5.2 משפט טיילור

ראינו בסעיף הקודם שאם פונקציה f רציפה בנקודה a אז הפונקציה הקבועה $g(x)\equiv f(a)$ מקרבת את f בסביבת הנקודה a, אבל אם f גזירה ב־ a ואם מרשים ישרים שאינם אופקיים, אז הישר המקרב ה"טוב ביותר" הוא הישר המשיק $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.

ככל שנרשה משפחה גדולה יותר של פונקציות מקרבות אפשריות, יש לצפות שנוכל לקבל גם קירובים טובים יותר. מיהו הפולינום הריבועי שנותן את הקירוב הטוב ביותר של f בסביבת a מבין כל הפולינומים הריבועיים האפשריים? ומה קורה כאשר עוברים לפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל־ n (עבור איזשהו n קבוע)? מתברר שאם f גזירה n פעמים ב־ a אז יש נוסחה מפורשת לפולינום ה"טוב ביותר" הזה.

הגדרה. תהי f פונקציה גזירה n פעמים ב־ a. פולינום טיילור ממעלה n של f המתאים לנקודה a הוא הפולינום

$$\begin{aligned}T_n(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j.\end{aligned}$$

המקרה הפרטי של נוסחת טיילור בו $a=0$ נקרא גם "נוסחת מקלורן" או "נוסחת טיילור־מקלורן".

עבור $n=0$ מתקבל הקירוב של f ע"י הפונקציה הקבועה $T_0(x)\equiv f(a)$, ועבור $n=1$ מתקבל הקירוב הלינארי $T_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$, שהינו המשיק לגרף הפונקציה בנקודה a.

שימו לב כי לכל n מתקיים $T_n(a)=f(a)$ ו־ $T_n'(a)=f'(a)$. ובאופן כללי

טענה. תהי f גזירה n פעמים ב־ a ויהי T_n פולינום טיילור שלה. אז $T_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$ לכל $k\le n$. כלומר, T_n ו־ f מתלכדים, ביחד עם נגזרותיהם עד סדר n, בנקודה a.

הטענה הזו היא מקרה פרטי (כאשר $p=T_n$) של הלמה הכללית הבאה

למה. יהי $p(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j(x-a)^j$ פולינום ממעלה n. אז לכל $k\le n$ מתקיים כי $p^{(k)}(a)=k!a_k$.

הוכחה. אם $j < k$ אז הנגזרת ה־ k־ית של $(x-a)^j$ היא זהותית אפס.

אם $j > k$ אז $\left(a_j(x-a)^j\right)^{(k)}$ הוא כפולה של $(x-a)^{j-k}$. זו חזקה חיובית ולכן הביטוי מתאפס בנקודה $x = a$.

באופן כזה הביטוי היחידי שנשאר הוא $\left(a_k(x-a)^k\right)^{(k)} = k!a_k$, ולכן

$$. \ p^{(k)}(a) = k!a_k$$

דוגמאות.

(i) כדי למצוא את פולינום טיילור של $f(x) = e^x$ בסביבת $a = 0$, נשים לב כי $f^{(n)}(x) = e^x$ לכל n, ולכן $f^{(n)}(0) = 1$ לכל n ופולינום טיילור הוא

$$. \ T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

(ii) כדי למצוא את פולינום טיילור של $f(x) = \sin x$ בסביבת $a = 0$, נחשב את הנגזרות של הפונקציה ב־ $a = 0$. נשתמש ב

$$f'(x) = \cos x \quad ; \quad f''(x) = -\sin x \quad ; \quad f^{(3)}(x) = -\cos x \quad ; \quad f^{(4)}(x) = f(x)$$

ונקבל שהנגזרות ב־ 0 הן $1, 0, -1, 0, \ldots$ (עם מחזור של 4). ופולינום טיילור של $\sin x$ הוא לכן

$$T_{2m+1}(x) = T_{2m+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m \, \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

כאשר $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

כאשר מחשבים את $T_n(x)$ מקבלים, כמובן, רק קירוב לערך האמיתי $f(x)$ של f בנקודה x. נסמן ב־ $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ את השגיאה (או השארית) בחישוב מקורב זה. כדי שנוכל להשתמש בקירוב באופן מעשי יש גם צורך בנוסחה שתאפשר הערכה של השגיאה הזו. המשפט הבא (שאותו לא נוכיח) נותן נוסחה כזו.

הערה. שימו לב שאם f זוגית אז $f^{(j)}(0) = 0$ לכל j איזוגי (הוכיחו!) ולכן בפולינום טיילור סביב $a = 0$ תופענה רק חזקות זוגיות. באופן דומה אם f איזוגית אז בפולינום טיילור סביב $a = 0$ תופענה רק חזקות איזוגיות.

משפט.[טיילור] תהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה a. אז לכל נקודה x בסביבה קיימת נקודה c בין x ל־ a כך ש

$$. \ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

הערות. (i) חשוב להבין שנוסחת השגיאה אינה מאפשרת חישוב מפורש שלה כי נקודת הביניים c אינה ידועה. הנוסחה רק מאפשרת הערכה של השגיאה, כפי שנדגים בהמשך.

(ii) נעיר כי עבור $n=0$ זה בדיוק משפט לגרנז', כי משפט לגרנז' מבטיח קיום c כך ש־ $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ או, ע"י העברה באגפים, $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$, אך $T_0(x) \equiv f(a)$ ולכן $R_0(x) = f'(c)(x-a)$.

(iii) עבור $n=1$ מקבלים $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$. כך מתקבלת הערכה כמותית לשגיאה בקירוב הלינארי של f: מקבלים שהשגיאה היא $R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$ המתנהגת כמו $(x-a)^2$. וזו שגיאה "קטנה": היא אכן מסדר גודל קטן יותר מאשר המרחק שבין x לבין a שהוא $|x-a|$.

דוגמאות.

(i) חשבו את e עם שגיאה הקטנה מ־ $1/1000$.

פולינום טיילור של $f(x) = e^x$ בסביבת $a=0$ הוא $T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j/j!$, והשארית היא $R_n(x) = e^c x^{n+1}/(n+1)!$ כאשר הנקודה $c = c(x,n)$ (התלויה הן ב־ x והן ב־ n) נמצאת בין 0 ל־ x.

אנו מתעניינים במקרה בו $x=1$ ולכן $0 < c < 1$ לכל n, וכשנשתמש בהערכה $e^c < e < 3$ נקבל כי $|R_n| < 3/(n+1)!$.

אנחנו מחפשים n שיבטיח כי $|R_n| < 1/1000$, ואי השוויון שקבלנו אומר שאם n יקיים $3/(n+1)! < 1/1000$, אז השגיאה ודאי תהיה קטנה גם היא מ־ $1/1000$. חישוב ישיר מראה כי זה אכן מתקיים עבור $n=6$, כלומר, קירוב של e עד כדי שגיאה הקטנה מאלפית ניתן ע"י $1 + 1 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + 1/6!$.

(ii) חשבו את $\sin 1$ עם שגיאה הקטנה מ־ $1/1000$.

פולינום טיילור של $f(x) = \sin x$ בסביבת $a=0$ הוא

$$T_n(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots \pm \ldots \ .$$

כדי להעריך את השארית, נשים לב שמכיוון שהנגזרות הן תמיד $\pm\sin$ או $\pm\cos$, נקבל ש־ $|f^{(n+1)}(c)| \le 1$ לכל n ולכל c. אצלנו $x=1$ ולכן $|R_n(x)| \le 1/(n+1)!$, ועבור $n=6$ נקבל כי $1/(6+1)! < 1/1000$. כלומר $1 - 1/3! + 1/5!$ מקרב את $\sin 1$ עד כדי שגיאה הקטנה מאלפית. (זכרו כי אנו מודדים זוויות ברדיאנים, וכי רדיאן אחד איננו זווית קטנה, הוא קרוב ל־ $60°$!).

נוסחת טיילור נותנת "שיטה נומרית" לחישוב מקורב. כמו לכל שיטה כזו יש לה שני רכיבים:

(a) פולינום טיילור נותן נוסחה לחישוב הקירוב הנומרי.

(b) הנוסחה לשארית מאפשרת לקבוע n ־ שהוא מעלת פולינום טיילור המקרב, כך שמובטח שהשגיאה (בערכה המוחלט) תהיה קטנה מרמת הדיוק הנדרשת.

הערה. כשרוצים לקרב את $f(x)$ לפונקציה נתונה f בנקודה מסויימת x, מוטל עלינו לבחור את הנקודה a שסביבה נבצע את פיתוח טיילור. השיקול הראשון בבחירת a הוא שניתן לחשב בקלות את ערכי הפונקציה ונגזרותיה בנקודה a. כך בדוגמא (i) היינו חייבים לבחור $a = 0$, כי אנו מכירים את $e^0 = 1$ אך איננו מכירים את e^a עבור $a \neq 0$. בדוגמא (ii) אנו יודעים לחשב את הערכים של $\sin x$ ונגזרותיה בנקודות מיוחדות (כמו 0, $\pi/2$, π וכו'), ולכן a תבחר להיות אחת מנקודות אלה.

מבין כל הנקודות האפשריות האלה נשתדל בדר"כ לבחור נקודה קרובה ככל האפשר ל־ a כי אז הגורם $(x-a)^{n+1}$ יתרום גם הוא להקטנת השגיאה.

דוגמא.

ניתן הערכה מלמטה לשגיאה בחישוב $\sqrt{1.2}$ ע"י פיתוח טיילור מסדר $n = 3$ של $f(x) = \sqrt{x}$ סביב $a = 1$. (בדקו שאתם מבינים למה נבחרה דוקא הנקודה $a = 1$).

הנגזרת ה־ n־ית של x^α היא $\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. אצלנו $\alpha = \frac{1}{2}$ ויש לחשב את הנגזרת הרביעית

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)x^{\frac{1}{2}-4} = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}\ .$$

כשנציב $x = c$ ונשתמש ב־ $c \leq 1.2$ נקבל כי השגיאה מקיימת

$$|R_3(1.2)| = \frac{|f^{(4)}(c)|}{4!}(1.2-1)^4 \geq \frac{1}{4!}\cdot\frac{15}{16}\cdot 1.2^{-\frac{7}{2}}\cdot 0.2^4\ .$$

הרעיון בשימוש בנוסחת טיילור הוא שבדרך כלל הגדלה של n מקטינה את השגיאה, וכך אפשר לשלוט בטיב הקירוב ע"י בחירה של n מספיק גדול. המשפט הבא ייתן תנאים על f שזה באמת יקרה.

להערכת המשפט חשוב לציין שיש גם פונקציות "רעות" שבשבילן זה לא קורה.

משפט. תהי f פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבה של הנקודה a. נניח שיש קבוע K כך ש־ $|f^{(n)}(x)| \leq K$ לכל x בסביבה זו ולכל n, אז $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ לכל x בסביבה.

הוכחה.

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \leq \frac{K|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

כי $A^n/n! \to 0$ לכל מספר A: נסמן $k = [|A|]+1$, ואז אם $n > k$ אז

$$A^n/n! = \frac{A\cdot\ldots\cdot A}{1\cdot\ldots\cdot n} \leq \frac{A^k}{k!}\cdot\frac{A^{n-k}}{k^{n-k}} = \frac{A^k}{k!}\cdot\left(\frac{A}{k}\right)^{-k}\cdot\left(\frac{A}{k}\right)^{n} \to 0$$

כי $\frac{|A|}{k} < 1$.

תנאי המשפט מתקיימים לכל הפונקציות האלמנטריות פרט לנקודות שבהן ברור שיש בעיה (כגון אפסים במכנה של פונקציה או נגזרותיה), ולכן משפט טיילור הוא באמת שימושי ביותר.

<u>דוגמא.</u>

ראינו שפולינום טיילור של הפונקציה $f(x) = e^x$ סביב הנקודה $a = 0$ הוא $T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j/j!$, והשארית היא $R_n(x) = e^c x^{n+1}/(n+1)!$ כאשר $c = c(x,n)$ נמצא בין 0 ל־ x. לכן $|c| = |c(x,n)| \leq |x|$ ו־ $e^c < e^{|x|}$, ומקבלים שלכל x קבוע

$$|R_n(x)| = e^c |x|^{n+1}/(n+1)! < e^{|x|}|x|^{n+1}/(n+1)! \underset{n\to\infty}{\to} 0 \; .$$

בפרט, כשנקח $x = 1$ נקבל ש־ $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \to e$, כפי שהבטחנו בשלבים מוקדמים יותר של הקורס.

****
סוף שעה 36
****

פרק 7

חשבון אינטגרלי

7.1 האינטגרל הלא מסוים

פעולת האינטגרציה היא "הפעולה ההפוכה" לפעולת הגזירה: נסמן ב־ $\int f(x)dx$ פונקציה קדומה לפונקציה f, כלומר פונקציה שנגזרתה היא הפונקציה הנתונה f, ונקרא לה גם האינטגרל הלא מסוים של f. (לפעמים נקצר את הסימון ונכתוב $\int f(x)$, או אפילו $\int f$). בשלב זה יש להתייחס לסימון כאל סימון בלבד. הוא אמנם נראה משונה, אך ההסבר יבוא מאוחר יותר.

הפונקציה הקדומה נקבעת עד כדי קבוע: אם $F' = G'$, אז יש קבוע C כך ש־ $F(x) = G(x) + C$ לכל x, כי מהנתון נובע שמתקיים $(F - G)' = 0$, ולכן $F - G$ פונקציה קבועה.

כך מתקבלת הנוסחה $\int h'(x)dx = h(x) + C$, ובאופן פורמלי $\int f(x)dx$ הוא, לכן, סימון למשפחה של פונקציות הנבדלות זו מזו בקבועים בלבד. אנחנו נציין את הקבועים רק כשנטפל בפונקציות מפורשות, כמו למשל $\int \cos x dx = \sin x + C$.

בסעיף זה נתאר מספר שיטות לחישוב הפונקציה הקדומה, שכולן מבוססות על כך שאינטגרציה היא הפעולה ההפוכה לפעולת הגזירה. ונתחיל בכך שנשים לב כי

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

כי לשני אגפי המשוואה יש אותה נגזרת (כאשר גוזרים את אגף ימין עפ"י כלל הגזירה $(aF + bG)' = aF' + bG'$).

אינטגרלים מיידיים

כשלמדנו לחשב נגזרות פיתחנו לעצמנו "טבלת נגזרות" של אותן פונקציות שאנו פוגשים לעתים קרובות, למשל $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ או $\sin' x = \cos x$. כשנקרא את הטבלה "בכיוון ההפוך" נקבל נוסחאות לפונקציות קדומות רבות, למשל

$\int \cos x = \sin x + C$.

$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

$\int x^{-1} = \ln|x| + C$.

$\int x^\beta = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C$ כאשר $\beta \neq -1$.

.$\int e^x dx = e^x + C$

.$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$ (**בידקו כי** $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, וכך שתי התשובות שנראות שונות זו מזו אכן נבדלות, למעשה, רק בקבוע).

לפונקציות קדומות שאנחנו מקבלים ע"י "הסתכלות בטבלה" נקרא אינטגרלים מיידיים (זה איננו מושג מתמטי מדוייק ־ ואנשים שונים "זוכרים" טבלאות שונות של אינטגרלים מיידיים). החישוב של האינטגרל הלא מסויים נעשה ע"י שימוש בנוסחאות שנפתח בסעיף זה כשבסוף התהליך ־ אם נצליח ־ נגיע לפונקציות שיש להן אינטגרלים מיידיים.

אינטגרציה בחלקים

"נהפוך" כעת את הנוסחה לנגזרת של המכפלה $(uv)' = uv' + u'v$. כשנבודד את המחובר uv' ונבצע אינטגרציה, נקבל את הנוסחה הבאה שנקראת "נוסחת האינטגרציה בחלקים"

$$\int uv' = uv - \int u'v \quad .$$

דוגמאות.

(i) לחישוב $\int x \ln x dx$ נשתמש ב־ $u(x) = \ln x$ ו־ $v'(x) = x$ ונקבל

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C \quad .$$

(ii) $\int \ln x dx = \int 1 \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C$. (כאן השתמשנו ב־ $u(x) = \ln x$ ו־ $v'(x) = 1$).

(iii) $\int e^x \sin x dx$. נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u = e^x$ ו־ $v' = \sin x$ ונקבל את $-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$. את האינטרגל נחשב ע"י אינטגרציה נוספת בחלקים עם $u = e^x$ ו־ $v' = \cos x$ ונקבל שהוא שווה ל־ $e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$. וכשנאסוף את כל המחוברים נקבל $2\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C$.

(iv) $\int \cos^n x dx$. נסמן את האינטגרל ב־ $F_n(x)$. נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u = \cos^{n-1} x$ ו־ $v' = \cos x$ ונשתמש בזהות $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ונקבל

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\Big(F_{n-2}(x) - F_n(x)\Big) \end{aligned}$$

או, אחרי העברה באגפים

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx \quad .$$

שימוש בנוסחה זו פעם אחרי פעם נותן לבסוף, עפ"י הזוגיות של n, תוצאה שבה יש לחשב או את האינטגרל $\int 1dx = x + C$ או את $\int \cos xdx = \sin x + C$.

<u>אינטגרציה ע"י הצבה</u>

כאן "הופכים" את כלל השרשרת, $(F(g(x))' = F'(g(x))g'(x)$. אם נסמן $F' = f$ ונבצע אינטגרציה נקבל כי

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

<u>דוגמאות.</u>

(i) $\int 2xe^{x^2}dx$. כאן נשתמש ב־ $f(t) = e^t$ (ואז גם $F(t) = \int f(t)dt = e^t$) וב־ $g(x) = x^2$ (ואז $g'(x) = 2x$), ונקבל שהאינטגרל הוא $F(g(x)) + C = e^{x^2} + C$.

באופן מעשי איטגרציה ע"י הצבה מתבצעת כך: אנחנו מציבים $y = x^2$ וכותבים את הנגזרת של y בצורה $\frac{dy}{dx} = 2x$. כאן אנחנו "מרמים" ומתייחסים לביטוי הפורמלי $\frac{dy}{dx}$ כאילו היה מנה של מספרים וכותבים $dy = 2xdx$. כעת כותבים את האינטגרנד ואת dx בעזרת המשתנה y ומקבלים $\int e^y dy = e^y + C$, שאותו "מתרגמים" חזרה לשפת המשתנה x כ־ $e^{x^2} + C$.

(ii) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan y + C = \arctan e^x + C$. (הצבנו $y = e^x$ ולכן $dy = e^x dx$).

(iii) $\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-dy}{y} = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C$. (הצבנו $y = \cos x$ ולכן $dy = -\sin xdx$).

(iv) באופן כללי יותר מקבלים את הנוסחה $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$, כי מציבים $y = f(x)$ ואז $dy = f'(x)dx$ והאינטגרל הופך להיות

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln|f(x)| + C \quad .$$

(v) לעתים יש לצרף שיטות אינטגרציה שונות. למשל, לחישוב האינטגרל $\int e^{\sqrt{x}}dx$ נציב $t = \sqrt{x}$ (כלומר $x = t^2$) ואז $dx = 2tdt$ ומקבלים $\int e^t 2tdt$, שאותו מחשבים ע"י אינטגרציה בחלקים.

<u>הערה.</u> חישוב נגזרות הוא מאוד שיטתי, וכשנתונה פונקציה מסובכת יש בידנו כללי גזירה המאפשרים לחשב את נגזרתה ע"י רדוקציה לנגזרות של רכיביה הפשוטים. חישוב הפונקציה הקדומה, לעומת זאת, איננו "מובנה" ודורש נסיון ודמיון. יתר על כן, יש פונקציות שנראות פשוטות מאד, כמו למשל e^{x^2} או $\frac{\sin x}{x}$, שאפשר להוכיח שאי אפשר בכלל להציג את הפונקציה הקדומה שלהן כפונקציה אלמנטרית!

מצד שני הבדיקה אם חישוב של פונקציה קדומה הוא נכון היא מאד פשוטה: גוזרים ובודקים שוויון לפונקציה הנתונה (כך שאין כל תרוץ לתשובה לא נכונה בבחינה...).

דוגמאות.

(i) לחישוב $\int \frac{1}{x^2-1}dx$ נציג $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$ (הצגה זו נקראת ההצגה כסכום של שברים חלקיים), ואז

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| + \ln|x+1|\right) + C$$

(ii) לחישוב $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}$ נציג כסכום של שברים חלקיים

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

כאשר $C=2, D=1, A=-2, B=1$. לכן

$$\begin{aligned} &\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx \\ =\ & \int \frac{-2}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx \\ =\ & -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln(x^2+1) + \arctan x + C. \end{aligned}$$

אנחנו נסתפק בדוגמאות האפייניות שנתנו ולא ניתן כאן את הנוסחאות הכלליות להצגה כסכום של שברים חלקיים ולא נוכיח כי השיטה אכן תקפה באופן כללי.

לפרטים נוספים ראו "הכנה טובה לטכניון"

בהצגה כשברים חלקיים משתמשים בכך שדרגת המונה קטנה מדרגת המכנה ובהצגת המכנה כמכפלת גורמיו האי פריקים. האפשרות לעבור משבר כללי לשבר שיש לו הצגה כזו נובעת משתי עובדות אלגבריות: הראשונה היא שאפשר לחלק פולינומים עם שארית (באופן דומה לחלוקה של מספרים שלמים): אם f ו־ g פולינומים כך ש־ $\deg(f) \geq \deg(g)$, אז יש פולינום q (המנה) ופולינום r (השארית) המקיים $\deg(r) < \deg(g)$, כך שמתקיים

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \ .$$

השניה היא שכל פולינום ניתן להצגה (שהיא למעשה יחידה) כמכפלה של פולינומים אי פריקים (והפולינומים האי פריקים הם או ממעלה ראשונה או שהם פולינומים ריבועיים שהדיסקרימיננטה שלהם שלילית).

אם $\frac{f}{g}$ פונקציה רציונלית כך ש־ $\deg(f) \geq \deg(g)$, חילוק המונה במכנה נותן כי $\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$ וזו הצגה כסכום של פולינום (שאין בעיה לחשב את האינטגרל שלו) ושל שבר שבו דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה.

הפירוק לגורמים אי־פריקים הוא, לעתים קרובות, לא מעשי (כי אין נוסחאות לחישובו), אבל לעתים הוא כן מעשי, כמו בדוגמא (i) ־ ואפילו אולי נתון מראש כמו בדוגמא (ii).

משהצגנו את השבר בעזרת שברים חלקיים, עלינו לדעת איך לחשב את האינטגרלים שלהם. אחרי שינויי משתנה לינאריים הם יהיו בעלי אחת מהצורות הבאות:

(i) $\int \frac{1}{(x-a)^j}dx = \frac{(x-a)^{-j+1}}{-j+1} + C$ (או $\ln|x-a| + C$ כאשר $j=1$).

.$\int \frac{2x}{(x^2+a^2)^j}dx = \frac{(x^2+a^2)^{-j+1}}{-j+1} + C$ $\quad (ii)$

.($x = a\tan t$ **בעזרת ההצבה**) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^j}dx = a^{-2j+1}\int \cos^{2j-2} t dt$ $\quad (iii)$

ביטויים עם שרשים

בביטויים כאלה אפשר בדר"כ להעזר בזהויות טריגונומטריות, למשל:

(i) $\int \sqrt{1-x^2}dx$. **הציבו** $x = \sin u$, **ואז** $dx = \cos u\, du$ **ומקבלים** $\int \cos^2 u du$.
כעת נשתמש בזהות $\cos^2 u = (1+\cos 2u)/2$ **והאיטגרל הוא**

$$\frac{1}{2}\int (1+\cos 2u)du = (u + \frac{1}{2}\sin 2u)/2 + C = (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})/2 + C \ .$$

(ii) **אם נציב** $x = \cos u$ **ב־** (i) **נקבל** $(-\arccos x + x\sqrt{1-x^2})/2$ **שהיא, לכאורה, תשובה שונה, אך למעשה הן נבדלות רק בקבוע כי** $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

(iii) **בביטוי רציונלי המכיל** $\sqrt{a^2-x^2}$ **מתבקש לנסות את ההצבה** $x = a\sin u$ **או** $x = a\cos u$.
לדוגמא, לחישוב $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ **נשלים לריבוע ונציב** $u = x-1$ **ואח"כ** $y = \cos u$.

(iv) **בביטוי רציונלי המכיל** $\sqrt{a^2+x^2}$ **כדאי לנסות את ההצבה** $x = a\tan u$ **ולהשתמש בזהות** $1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$.

(v) **בביטוי רציונלי המכיל** $\sqrt{x^2-a^2}$ **כדאי לנסות את ההצבה** $x = \frac{a}{\sin t}$.

7.2 האינטגרל המסוים

נתונה קבוצה במישור. מהו שטחה? נקודת המוצא היא הגדרת שטח המלבן: אורך הבסיס כפול הגובה. מכאן נקבל גם תשובה פשוטה למשולש: ע"י חיתוך והרכבה השטח זהה לחצי שטח מלבן עם אותו בסיס ואותו גובה. אך מה עם עיגול? כבר ארכימדס נתן שיטה לחישוב מקורב של שטח העיגול: נחסום בעיגול מצולע משוכלל עם n צלעות. את שטחו קל לחשב, כי הוא מורכב ממשולשים שאת שטחם אנו יודעים לחשב. כאשר n גדול המצולע מכסה כמעט את כל העיגול, ולכן שטח העיגול הוא הגבול, כאשר $n \to \infty$, של שטחים אלה. למורה: לשרטט

נתחיל בפיתוח מתמטי של אותו רעיון, ונעשה זאת בשלב זה רק לקבוצות המוגבלות בין הגרף של פונקציה לבין ציר ה־ x־ים. (כמובן שאח"כ נוכל לטפל גם בקבוצות הניתנות לפירוק והרכבה מקבוצות כאלה, ואפילו צורות כלליות יותר).

הגדרה. השטח המוגבל בין הגרף של f לקטע $[a,b]$ נקרא האינטגרל של f בקטע, ונסמנו ב־ $\int_a^b f(x)dx$ (ולפעמים ב־ $\int_a^b f$).

הערות. (i) בשלב זה, זהו רק סימון. הקשר שלו עם הפונקציה הקדומה יתברר רק בהמשך והוא אחד מההשגים הגדולים של המתמטיקה.

(ii) ה־ x בכתיבה $\int_a^b f(x)dx$ הוא רק שם למשתנה (כמו השם j לאינדכס הסכימה בסכום $\sum_{j=M}^{N} a_j$) ואפשר להחליף את x בכל סימן אחר, כגון y, t, s וכדומה.

האינטגרל הוא <u>מספר</u> ואינו תלוי ב־ x!

(iii) השטח שנגדיר יהיה <u>שטח עם סימן</u>: שטח מעל ציר ה־ x־ים יקבל סימן חיובי, ושטח מתחת לציר יקבל סימן שלילי (ונביא בהמשך דוגמאות פיסיקליות שתסברנה שנכון וטבעי להתייחס לאינטגרל של פונקציה שלילית כשלילי).

הצורה הבסיסית שאנו יודעים את שטחה היא המלבן, ולכן אבני הבנין היסודיות בתורה שנפתח תהיינה פונקציות המגבילות צורה מלבנית: פונקציות שהן קבועות בקטע. המקרה הכללי יטופל בשלושה צעדים עפ"י ה"מורכבות" של f.

צעד 1. יהי I קטע חסום (שיכול להיות סגור, פתוח או חצי פתוח) עם קצוות a ו־ b, ונניח ש־ f מקבלת את הערך הקבוע c בקטע. אז השטח ש־ f מגבילה הוא $c(b-a)$ (שהוא שלילי אם c שלילי), ולכן $\int_a^b f = c(b-a)$.

צעד 2. נניח ש־ f היא "פונקצית מדרגה", כלומר, הקטע $[a,b]$ מחולק ל־ n קטעים חלקיים הנקבעים ע"י נקודות החלוקה $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, כך ש־ f מקבלת ערך קבוע c_i בקטע שבין a_{i-1} ו־ a_i (אין זה חשוב אם $f(a_i) = c_i$ או c_{i-1}). הגרף של f מגביל איחוד זר של מלבנים, עם בסיסים באורך $a_i - a_{i-1}$ וגבהים c_i בהתאמה, ולכן $\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} c_i(a_i - a_{i-1})$. למורה: לשרטט

צעד 3. בשלב הסופי והעיקרי, שלפיתוחו יוקדש סעיף זה, נשתמש בתהליך גבולי. כמו ארכימדס נקרב את השטח המבוקש ע"י צורות "פשוטות", ודרך טבעית לעשות זאת היא ע"י קירוב של השטח ע"י פונקציות מדרגה עם חלוקה מאוד עדינה של $[a,b]$ וכאשר ערכה בקטע ה־ i הוא, למשל, $c_i = f(a_i)$.

מסיבות מתמטיות טכניות יש צורך ביותר גמישות בבחירת הערכים c_i, ונבחר אותם כגבהים $c_i = f(t_i)$, כאשר נרשה בחירה שרירותית של הנקודה t_i בקטע ה־ i־י, כלומר בקטע $[a_{i-1}, a_i]$:

<u>הגדרה.</u> (i) תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$ ותהי $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ חלוקה של הקטע. לכל i נבחר נקודה $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$. הסכום למורה: לשרטט

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1})$$

נקרא סכום רימן של הפונקציה f ביחס לחלוקה הנתונה וביחס לבחירת הנקודות t_i.

(ii) לביטוי $\max_{1\le i\le n}(a_i - a_{i-1})$ נקרא "הפרמטר של החלוקה".

סכומי רימן הם הקירובים הטבעיים של השטח המוגבל ע"י הגרף של f. אנחנו נעסוק רק בפונקציות המקיימות שכאשר החלוקה נהיית עדינה יש לסכומי הרימן המתאימים גבול, ובאופן פורמלי

<u>הגדרה.</u> נאמר שפונקציה חסומה f המוגדרת בקטע $[a,b]$ היא פונקציה אינטגרבילית רימן בקטע, ושהאינטגרל שלה הוא המספר I אם סכומי רימן $\sum f(t_i)(a_i - a_{i-1})$ של

f שואפים ל־ I כאשר הפרמטר של החלוקות שואף לאפס (ובאופן בלתי תלוי בבחירה הספציפית של החלוקה ובבחירת הנקודות t_i).

את האינטגרל של f נסמן ב־ $\int_a^b f(t)dt$ (ובכתיב מקוצר, $\int_a^b f$). ל־ a ו־ b נקרא גבולות האינטגרציה, ול־ t נקרא משתנה האינטגרציה.

להגדרת האינטגרל כגבול של סכומי רימן יש חשיבות רבה, הן מתמטית והן, כפי שנראה בהמשך, בשימושים לענפי המדע והטכנולוגיה השונים. אבל בד"כ קשה מאוד להשתמש באופן ישיר בהגדרה לחישוב האינטגרל, כי זה מצריך התייחסות לכל החלוקות ולכל הבחירות האפשריות של נקודות t_i בקטעי החלוקה, ובהמשך נציג שיטות יעילות יותר לחישוב.

הנה דוגמא פשוטה שבה בבחירה <u>מסוימת</u> של החלוקות ושל הנקודות אכן ניתן לחשב את הגבול.

<u>דוגמא.</u>

$\int_0^1 xdx = 1/2$ מכיון שזה שטח של משולש עם בסיס וגובה 1. נבנה סכומי רימן שנותנים תוצאה זו. לכל n נסתכל בסכום רימן של $f(x) = x$ המתאים לחלוקה האחידה

$$0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \dots \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

ולבחירה $t_i = \frac{i}{n}$ (כלומר לקצוות הימניים של הקטעים החלקיים). ואז סכומי רימן הם

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \to 1/2 \, .$$

כל הפונקציות האלמנטריות החסומות הן אינטגרביליות רימן. המשפט הבא אפילו כללי יותר

<u>משפט.</u> משפחות הפונקציות הבאות הן אינטגרביליות רימן בכל קטע סופי (בתנאי שהן חסומות בו):

(i) פונקציות מונוטוניות.

(ii) פונקציות רציפות.

(iii) פונקציות רציפות או מונוטוניות למקוטעין, כלומר כאלה שאפשר לחלק את הקטע למספר סופי של קטעים חלקיים באופן שהפונקציה רציפה או מונוטונית בכל אחד מהם. (זו, כמובן, הכללה של (i) של (ii)).

<u>הערה.</u> יש פונקציות שאינן אינטגרביליות, אך העניין בהן הוא מתמטי והן אינן מופיעות בשימושים מדעיים וטכנולוגיים ולכן לא נדון בהן בכלל.

לא נוכיח את המשפט החשוב הבא, הנותן את התכונות הבסיסיות של האינטגרל ־ אך שכנעו את עצמכם שהוא אכן מבטא תכונות "ברורות" של שטח.

<u>משפט.</u> תהיינה f ו־ g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a, b]$, אז

(i) לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ גם הפונקציה $\alpha f+\beta g$ אינטגרבילית בקטע, ומתקיים

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g \; .$$

(ii) אם $f\le g$ בקטע אז למורה: רק להסביר בשרטוט

$$\int_a^b f\le\int_a^b g \; .$$

בפרט, אם $f\ge 0$ אז $\int_a^b f\ge 0$, ואם $m\le f(x)\le M$ לכל x בקטע, אז

$$m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a) \; .$$

(iii) אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז גם $|f|$ אינטגרבילית בו ו־ $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$.

(iv) אם $a<c<b$ אז f אינטגרבילית בכל אחד מהקטעים החלקיים $[a,c]$ ו־ $[c,b]$ ומתקיים

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

(v) אם $h=f$ פרט למספר סופי של נקודות, אז גם h אינטגרבילית בקטע ומתקיים ש־ $\int_a^b h=\int_a^b f$.

הערות. (i) ראינו במשפט כי אם $f\ge 0$ אז $\int_a^b f\ge 0$. בד"כ העובדה שיש נקודה x_0 שבה $f(x_0)>0$ אינה מספיקה כדי לקבל אי שוויון חריף $\int_a^b f>0$, למשל, אם f זהותית 0 פרט לערך חיובי בנקודה הבודדת x_0. אך אם f רציפה אכן מתקבל אי שוויון חריף: אם $f(x_0)=c>0$ אז מרציפות f נובע שיש סביבה $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ שבה מתקיים $f(x)\ge\frac{c}{2}>0$, ולכן למורה: לשרטט

$$\int_a^b f=\int_a^{x_0-\delta}f+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f+\int_{x_0+\delta}^b f\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f\ge 2\delta\frac{c}{2}>0$$

כי המחוברים שהזנחנו הם אי־שליליים.

(ii) האינטגרל $\int_a^b f$ הוגדר עבור $a<b$. נגדיר כעת באופן פורמלי

$$\int_b^a f=-\int_a^b f$$

(וכמובן ש־ $\int_a^a f=0$). הגדרה זו משחררת מהצורך להשגיח על סדר הגבולות, וכל כללי האינטגרל נשמרים. בפרט הנוסחה ב־ (iv) נשארת בתוקף, ואם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז לכל $\alpha,\beta,\gamma\in[a,b]$ מתקיים

$$\int_\alpha^\beta f=\int_\alpha^\gamma f+\int_\gamma^\beta f$$

בלי תלות בסדר של α,β,γ. (בידקו זאת כתרגיל!).

7.2.1 הקשר בין האינטגרל המסויים לפונקציה הקדומה.

למורה: לשרטט

תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ונגדיר פונקציה חדשה $F(x)=\int_a^x f$. זוהי פונקציה מוגדרת היטב בקטע, ונחקור את תכונותיה.

משפט. (i) תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז הפונקציה $F(x)=\int_a^x f$ רציפה בו.

(ii) [המשפט היסודי של החדו"א] תהי f רציפה ב־ $[a,b]$, אז $F(x)=\int_a^x f$ גזירה ומתקיים

$$F'(x_0)=f(x_0)$$

לכל x_0 בקטע. (אם x_0 נקודת קצה של הקטע אז הנגזרת היא חד־צדדית).

הוכחה. נוכיח רק את (ii), ונשים לב שכפונקציה רציפה f אכן אינטגרבילית.
נבדוק נגזרת מימין. נבחר $x>x_0$ ונציג

$$F(x)-F(x_0)=\int_a^x f-\int_a^{x_0} f=\int_{x_0}^x f\ .$$

למורה: לשרטט

נסמן $M_x=\max_{x_0\le t\le x} f(t)$ ו־ $m_x=\max_{x_0\le t\le x} f(t)$, ואז הרציפות של f ב־ x_0 נותנת כי $\lim_{x\to x_0^+} m_x=\lim_{x\to x_0^+} M_x=f(x_0)$. כמו כן אי השוויונים

$$m_x(x-x_0)\le\int_{x_0}^x f\le M_x(x-x_0)$$

נותנים כי $m_x\le\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\le M_x$, ועפ"י משפט הסנדוויץ' נקבל שגם

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)\ .$$

באופן דומה מראים כי $F'_-(x_0)=f(x_0)$.

הערות. (i) למעשה לא היה צריך להניח ש־ f רציפה <u>בכל</u> הקטע. די היה להניח שהיא אינטגרבילית ושהיא רציפה בנקודה מסויימת x_0 ־ ואז היינו מקבלים ש־ F גזירה ב־ x_0 וכי $F'(x_0)=f(x_0)$.

(ii) הרציפות של f ב־ x_0 חיונית. למשל, הפונקציה $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$ איננה רציפה בנקודה $x_0=0$, וחישוב ישיר מראה ש־ $F(x)=\int_0^x f(x)=|x|$ איננה גזירה בנקודה זו.

מסקנה. אם f רציפה ב־ $[a,b]$ אז הנוסחה $F(x)=\int_a^x f$ מגדירה פונקציה קדומה שלה.

הערות. (i) אין חשיבות לקביעת הגבול התחתון בהגדרת F דוקא כקצה הקטע a. אם נבחר איזושהי נקודה c בקטע ונגדיר $F_1(x)=\int_c^x f$ אז F_1-F היא הקבוע $\int_a^c f$ ולכן יש להן אותה נגזרת.

(ii) אפשר להסתכל על האינטגרל גם כפונקציה של הגבול התחתון. אם $G(x) = \int_x^b f$ אז נוכל גם להציג $G(x) = -\int_b^x f$ ולכן $G'(x) = -f(x)$.

(iii) אם $b(x)$ פונקציה גזירה ואם $H(x) = \int_a^{b(x)} f$ אז $H(x) = F(b(x))$ וכשנגזור עפ"י כלל השרשרת נקבל כי $H'(x) = f(b(x))b'(x)$.

(iv) באופן כללי יותר, אם $\phi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f$ אז $\phi(x) = F(b(x)) - F(a(x))$ ולכן $\phi'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$.

למשל, $\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{7x^2} \sin t dt = 14x\sin(7x^2) - (-\sin x)\sin(\cos x)$.

המשפט הבא הוא תרגום של המשפט היסודי של החדוא לנוסחה מעשית לחישוב האינטגרל המסויים

<u>**משפט.**</u>[נוסחת ניוטון־לייבניץ] תהי f רציפה ב־ $[a,b]$ ותהי G פונקציה קדומה שלה, אז

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) \ .$$

<u>**הוכחה.**</u> הפונקציה $F(x) = \int_a^x f$ גם היא פונקציה קדומה של f, ולכן יש קבוע C כך ש־ $G = F + C$. נציב $x = a$, ואז $F(a) = 0$ נותן כי $C = G(a) - F(a) = G(a)$, ולכן

$$\int_a^b f = F(b) = G(b) - C = G(b) - G(a) \ .$$

נוסחת ניוטון־לייבניץ מאפשרת לחשב את $\int_a^b f$ בלי חלוקות ובלי קירובים. פשוט מוצאים פונקציה קדומה ל־ f ומשתמשים בנוסחה. למשל

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2 \ .$$

****
סוף שעה 40
****

7.2.2 שימושים של האינטגרל המסוים

למורה: כל הדוגמאות וההערות בסעיף זה חשובות!

(i) אפשר לחשב בעזרת אינטגרלים גם שטחים של קבוצות יותר כלליות. למשל, השטח שבין שני גרפים ניתן לחישוב כהפרש השטחים שהם מגבילים. לדוגמא, השטח (הגיאומטרי) שבין הגרפים של x^2 ושל x^3 מעל הקטע $[0,2]$ הוא

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^2 - x^3| dx &= \int_0^1 (x^2 - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - x^2)dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(ii) גוף נע לאורך הציר הממשי כשמהירותו בזמן t היא $v(t)$ ס"מ/לשניה. בזמן $t=0$ הוא נמצא בנקודה a. איפה הוא ימצא בזמן $t=T$?

נסמן את מיקומו בזמן t ב־ $S(t)$. כידוע $S'(t)=v(t)$ ולכן (בהנחה ש־ v פונקציה רציפה, כך שנוסחת ניוטון לייבניץ תקפה) $S(T)=a+\int_0^T v(t)dt$.

הערות. (a) הגדרת האינטגרל כשלילי כשהפונקציה שלילית נראתה "מלאכותית" כשעסקנו בחישובי שטחים, אבל כשמסתכלים על האינטגרל כמבטא את מיקומו של הגוף זה מובן מאליו: הגוף נע ימינה כשהמהירות חיובית ושמאלה כשהיא שלילית!

אם רוצים לחשב את הדרך הכוללת שהגוף עובר עד לזמן T (ולא את מיקומו) אז הנוסחה היא $\int_0^T |v(t)|dt$. למשל, אם $v(t)=\sin t$ ו־ $a=0$ אז $S(T)=-\cos T$ שיכול להיות (עפ"י הערך של T) חיובי, שלילי או אפס. המרחק הכולל שהגוף יעבור עד לזמן T הוא $\int_0^T |\sin t|dt$.

(b) חשוב מאוד להבין את הנוסחה $S(T)=a+\int_0^T v(t)dt$ גם עפ"י ההגדרה של האינטגרל כגבול של סכומי רימן: נקח חלוקה עדינה $0<t_1<\ldots<t_N=T$ של הקטע $[0,T]$, ואז הגוף מועתק בקטע החלוקה ה־ i־י בערך ב־ $v(t_i)(t_i-t_{i-1})$, ולכן סכום רימן $\sum_{i=1}^N v(t_i)(t_i-t_{i-1})$ הוא קירוב של ההעתק הכללי האמיתי בפרק הזמן שבין $t=0$ לבין $t=T$.

אבל מבחינה מתמטית סכום זה גם מקרב (עפ"י הגדרת האינטגרל) את האינטגרל $\int_0^T v(t)dt$. ולכן כשעוברים לגבול מקבלים כי האינטגרל מתלכד עם ההעתק.

(c) זה גם המקום להסביר את הסימון לאינטגרל המסוים. דרך טובה לחשוב על האינטגרל המסוים היא כעל "סכום רציף". נסמן $\Delta_i=a_i-a_{i-1}$ ונציג את סכום רימן בצורה $\sum_{i=1}^n f(t_i)(a_i-a_{i-1})=\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta_i$. כשהחלוקה הולכת ומתעדנת המחוברים הולכים וקטנים ומספרם גדל. בגבול מחליפים את האורך (הקטן) Δ_i ב"אורך האינפיניטיסימלי" dx, את המחוברים $f(t_i)\Delta_i$ ב"מחובר האינפיניטיסימלי" $f(x)dx$ ואת המספר שלהם, שהוא i בין 1 ל־ n, ב"מספר רציף" שהוא x בין a לבין b. (ובאופן קליגרפי $\sum_{i=1}^n$ מוחלף בסימן האינטגרל $\int_a^b$ ו־ Δ_i מוחלף ב־ dx). האנלוגיה הזו הביאה להכללת ה־ dx בסימון.

יתר על כן, לכל גורם בתוך האינטגרל יש יחידות: ל־ $f(x)$ יש היחידות של f ול־ dx היחידות של Δ_i, כלומר של x. באופן כזה ל"סכום הרציף", $\int_a^b f(x)dx$, יש אותן יחידות כמו לסכומי רימן $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta_i$.

בחישוב שטחים הן ל־ x והן ל־ f יש יחידות אורך, ולכן לאינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ יש יחידות שטח. בדוגמא עם המהירות ל־ t יש יחידות זמן ול־ v יש יחידות מהירות, כלומר $\frac{\text{אורך}}{\text{זמן}}$, ולכן לאינטגרל $\int_a^b v(t)dt$ יש יחידות אורך.

ההסתכלות על האינטגרל כסכום רציף היא מאוד אינטואיטיבית ויעילה, ומהנדסים ופיסיקאים משתמשים בה לעתים קרובות. אנחנו נדגים זאת גם בחלק מהדוגמאות הבאות.

(iii) תיל (המזוהה מתמטית עם הקטע $[a,b]$) הוא בעל צפיפות משתנה. נסמן ב־ $m(x)$ את המסה של הקטע $[a,x]$, ואז צפיפות המסה בנקודה x ניתנת ע"י הקשר $\rho(x)=\lim_{h\to 0}\frac{m(x+h)-m(x)}{h}$, כלומר $\rho(x)=m'(x)$.

אם נתונה הצפיפות, $\rho(x)$, אז עפ"י המשפט היסודי של החדו"א אפשר לשחזר את המסה ע"י הנוסחה $m(x)=\int_a^x \rho(t)dt$. היחידות של ρ הן $\frac{\text{מסה}}{\text{אורך}}$, היחידות של x (ולכן גם של dx) הן אורך, ושל m מסה.

כשאנחנו מסתכלים על האינטגרל כעל "סכום רציף" אנחנו מסכמים את "המסה האינפיניטיסימלית", $\rho(x)dx$, של ה"קטע" האינפיניטיסימלי $[x,x+dx]$ עבור כל ערכי x בין a לבין b.

(iv) נסמן ב־ $F(x)$ את הרווח הכולל מייצור של x יחידות ממוצר מסוים, וב־ $f(t)$ את הרווח השולי בייצור היחידה ה־ t. אז $f=F'$, ואם הפונקציה f נתונה, אפשר לחשב את F ע"י $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

ובהסתכלות על האינטגרל כסכום רציף: היחידות של x (או t) הן יחידות מוצר, והיחידות של $f(t)$ הן $\frac{\text{שקלים}}{\text{יחידות מוצר}}$, ולכן היחידות של $f(t)dt$ הן שקלים (וזה הרווח מייצור היחידה ה־ t). גם היחידות של $F(x)$ הן שקלים. ההצגה כאינטגרל $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ מציגה את הרווח הכולל כ"סכום" של סך הרווחים מייצור כל היחידות.

גם כאן ברור מדוע האינטגרל של פונקציה שלילית הוא שלילי: $f(t)<0$ פירושו שעלות הייצור של היחידה ה־ t גדולה יותר מההכנסה ממכירתה, ואילו $F(x)<0$ פירושו שהערך הכולל של כל x היחידות קטן ממחיר ייצורן. וברור שאם מפסידים בייצור ומכירה של כל יחידת מוצר, אז גם המכירה הכוללת תהיה בהפסד.

הערה. המכנה המשותף לדוגמאות בהן יופיע אינטגרל הוא שלגודל שאותו מנסים לחשב (שטח, העתק, מסה, עלות וכו') יש שתי תכונות:

אדיטיביות ־ כשמפרקים קטע של המשתנה החפשי x לקטעים חלקיים, הגודל הכולל המבוקש (שטח, העתק, מסה, עלות) הוא סכום הגדלים בקטעים החלקיים.

מכפלה ־ כאשר הפונקציה הנתונה קבועה בקטע (גובה, מהירות, צפיפות, רווח) אז הגודל המבוקש הוא מכפלת הקבוע באורך הקטע.

כשתכונות אלה מתקיימות הסכומים $\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta_i$ נותנים קירוב של התוצאה המבוקשת, כי הם מקרבים את f ע"י פונקצית המדרגות המקבלת את הערך הקבוע $f(t_i)$ בקטע החלוקה ה־ i־י. אך הסכומים הם בדיוק סכומי רימן המקרבים את $\int_a^b f$.

(v) דוגמא נוספת מאותו סוג: העבודה הנעשית כשגוף בעל מסת יחידה נע לאורך הקטע $[a,b]$ כאשר הכח הפועל עליו בנקודה x הוא $f(x)$. אם הכח $f(x)$ הוא קבוע, F_1, אז העבודה היא המכפלה $(b-a)F_1$ (בנירמול מתאים של היחידות), כמו כן הסכום של העבודות בקטעים זרים נותן את העבודה הכוללת. לכן כאשר f אינה קבועה העבודה הכוללת היא "הסכום הרציף" $\int_a^b f(x)dx$.

(vi) תהי f פונקציה גזירה ברציפות בקטע $[a,b]$, אז האורך של הגרף שלה ניתן ע"י הנוסחה $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$. ניתן הוכחה ע"י הסתכלות באינטגרל כסכום רציף, ונזכור תחילה כי אורך הקטע המחבר את הנקודות (a_1,a_2) ו־ (b_1,b_2) במישור הוא $\left((a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

נסתכל כעת על המשולש האינפיניטיסימלי ישר הזווית שבסיסו הוא הקטע $[(x,f(x)),(x+dx,f(x))]$ (אורך הקטע הזה הוא dx) וגובהו $f'(x)dx$. אורך היתר שלו הוא $\sqrt{(dx)^2+(f'(x)dx)^2}=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, ואורך הגרף הוא

"הסכום" של כל ארכי היתרים האלה "כשמסכמים" על כל ה־ x־ים, כלומר $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

דוגמא.

נחשב את ההיקף של מעגל היחידה. לשם כך נחשב את אורך הגרף של הפונקציה $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ב־ $[-1,1]$, שהוא חצי ההיקף. כאן $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ ולכן $1+(f'(x))^2=\frac{1}{1-x^2}$ ואורך הגרף הוא

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}=\pi\ .$$

הקף המעגל כולו הוא לכן 2π.

****
סוף שעה 42
****

7.2.3 חישוב האינטגרל המסוים

בחישוב של האינטגרל המסויים נשתמש בשיטות שפיתחנו למציאת הפונקציה הקדומה (אינטגרציה בחלקים והצבה), אך נעשה זאת תוך התייחסות לגבולות האינטגרל. (מבחינה מעשית זה לפעמים אפילו מפשט את החישוב).

דוגמאות.

(i) $\int_0^\pi e^x\sin x dx$. נסמן את האינטגרל ב־ I ונבצע שתי אינטגרציות בחלקים

$$\begin{aligned}
I &= e^x\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi e^x\cos xdx=-\int_0^\pi e^x\cos xdx\\
&= -\left\{e^x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi e^x\sin xdx\right\}\\
&= -\{-e^\pi-1+I\}
\end{aligned}$$

ולכן $I=(e^\pi+1)/2$.

(ii) $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ (זה השטח של רבע מעיגול היחידה). נציב $x=\sin t$ ואז $dx=\cos tdt$, ולכן $I=\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt$.

ניתן שלוש שיטות לחישוב האינטגרל I.

א. נבצע אינטגרציה בחלקים ונקבל

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2}\cos t\cos tdt=\cos t\sin t\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\sin t\sin tdt\\
&= 0+\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 t)dt=\frac{\pi}{2}-I
\end{aligned}$$

ולכן $I=\frac{\pi}{4}$.

ב. נשתמש בזהות $\cos^2 t=(1+\cos 2t)/2$ ונקבל

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)/2dt=\Big(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\Big)\Big|_0^{\pi/2}=\pi/4 \; .$$

ג. במקום $x=\sin t$ נציב $x=\cos t$ ונקבל $I=-\int_{\pi/2}^0\sin^2 tdt=\int_0^{\pi/2}\sin^2 tdt$.
עפ"י הזהות $\sin^2+\cos^2=1$ נקבל

$$2I=\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt+\int_0^{\pi/2}\sin^2 tdt=\int_0^{\pi/2}dt=\pi/2$$

ו־ $I=\pi/4$. (שכנעו עצמכם כי $\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=\int_0^{\pi/2}\sin^2 tdt$ גם ע"י הסתכלות בגרפים).

(iii) נשים לב שלפעמים החישוב כולו הופך לטריביאלי, למשל אם f איזוגית אז $\int_{-a}^a f=0$. (אם f זוגית אז $\int_{-a}^a f=2\int_0^a f$).

7.2.4 חישובים מקורבים

כפי שהערנו כבר אין דרך שיטתית למציאת הפונקציה הקדומה. יתר על כן, אפילו אם מוצאים פונקציה מפורשת, כגון $\sin x$, כשמציבים את הגבולות התוצאה, בדר"כ, איננה מספר "פשוט" ויש להשתמש בשיטות קירוב לחישובו.

שיקולים אלה אומרים שהמשפט היסודי של החדו"א אינו סוף הסיפור, וכי עלינו לחפש שיטות לחישוב מקורב של האינטגרל. אנחנו נראה רק איך לקרב את האינטגרל ע"י קירוב האינטגרנד בעזרת משפט טיילור.

<u>דוגמא.</u>

לחישוב $\int_0^1\sin x^2dx$ נשתמש בנוסחת טיילור עבור $\sin t$

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}\ldots\pm\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_n(t)$$

עם שארית המקיימת $|R_n(t)|\le\frac{|t|^{2n+3}}{(2n+3)!}$. כשנשתמש ב־ $t=x^2$ ונבצע אינטגרציה נקבל

$$\begin{aligned}\int_0^1\sin x^2dx &= \int_0^1\Big\{x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}\ldots\pm\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}+R_n(x^2)\Big\}dx\\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{11\cdot 120!}\ldots\pm\frac{1}{(4n+3)\cdot(2n+1)!}+E_n\end{aligned}$$

כאשר $|E_n|\le\int_0^1\frac{t^{4n+6}dt}{(2n+3)!}=\frac{1}{(4n+7)(2n+3)!}$.

שימוש במשפט טיילור נותן גם את ההערכה החשובה הבאה

משפט.[כלל המלבן] תהי f בעלת שתי נגזרות רציפות בקטע $[a,b]$, ונסמן את אמצע הקטע ב־ $c=\frac{a+b}{2}$. אז $\int_a^b f = f(c)(b-a)+R$ כאשר השגיאה R מקיימת

$$|R| \le \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \,.$$

הוכחה. נשתמש בפיתוח טיילור מסדר 1 סביב c ונקבל כי

$$f(t) = f(c) + f'(c)(t-c) + \frac{1}{2} f''(\gamma_t)(t-c)^2$$

כאשר γ_t נקודת ביניים בין c לבין t. כעת נבצע אינטגרציה בין a ל־ b ונשים לב כי המחובר הראשון באגף ימין הוא $f(c)(b-a)$, המחובר השני מתאפס, ואילו השלישי חסום ע"י

$$\left| \int_a^b \frac{1}{2} f''(\gamma_t)(t-c)^2 dt \right| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \int_a^b \frac{1}{2}(t-c)^2 dt = \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \,.$$

בעזרת כלל המלבן אפשר, למשל, להעריך את השגיאה בקירוב האינטגרל על ידי סכומי רימן: כשנשתמש בו עם החלוקה האחידה אז האורך של כל קטע חלקי הוא $a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ ונקבל כי

$$\int_a^b f = \sum_{i\le n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f = \sum_{i \le n} \Big(f(c_i)(a_i - a_{i-1}) + R_i \Big) \quad + E$$

ולכן ההפרש $E = \int_a^b f - \sum \Big(f(c_i)(a_i - a_{i-1}) \Big) = \sum R_i$ מקיים

$$|E| \le n \frac{(\frac{b-a}{n})^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \,.$$

****

סוף שעה 44

****

7.3 אינטגרלים מוכללים

עד עתה טיפלנו באינטגרלים של פונקציות חסומות בקטע סופי. כעת נרצה להכליל את האינטגרל למקרים בהם תנאים אלה אינם מתקיימים.

הגדרה. (i) תהי f פונקציה המוגדרת בקרן $[a,\infty)$ ואינטגרבילית בכל קטע חלקי $[a,c]$. אם הגבול $\lim_{c\to\infty} \int_a^c f$ קיים נאמר שהאינטגרל המוכלל של f בקרן קיים או מתכנס (ובקיצור נאמר פשוט ש־ f אינטגרבילית בקרן), ונסמן

למורה: לשרטט

$$\int_a^\infty f = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f \,.$$

(ii) תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b)$ ואנטגרבילית בכל קטע חלקי $[a,c]$. אם קיים הגבול משמאל $\lim\limits_{c\to b^-}\int_a^c f$ נאמר שהאינטגרל המוכלל של f בקטע $[a,b]$ קיים או מתכנס (ובקיצור נאמר פשוט ש־ f אינטגרבילית בקטע), ונסמן

$$\int_a^b f = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f\ .$$

באופן דומה מגדירים אינטגרל מוכלל בקרן שמאלית, או בקטע סופי כשהסינגולריות היא בקצה השמאלי.

אם הגבול קיים רק במובן הרחב והוא $+\infty$ (או $-\infty$), נאמר לפעמים כי האינטגרל מתבדר ל־ ∞ (או $-\infty$).

הערה. **קיומו או אי קיומו של האינטגרל $\int_a^\infty f$ תלוי רק בהתנהגות של f באינסוף ולא בבחירת הנקודה a (אולם ערכו של האינטגרל, אם הוא קיים, כן תלוי, כמובן, ב־ a), כי אם $a<c$ אז**

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f\ .$$

לפעמים נאמר לכן כי $\int^\infty f$ קיים בלי לציין כלל גבול תחתון. הערה דומה תקפה ביחס לאינטגרל של פונקציה לא חסומה בקטע סופי.

דוגמאות.

(i) **האינטגרל $\int_0^\infty \sin x$ לא קיים, כי ל־ $\int_0^c \sin x = \cos c\ -1$ אין גבול כאשר** $c\to\infty$.

למורה: לשרטט

(ii) **האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x}$ מתכנס כי $\int_0^c e^{-x} = 1-e^{-c}\to 1$ כאשר** $c\to\infty$.

(iii) **נבדוק את** $\int_1^\infty x^{-p}$.

אם $p=1$ אז $\int_1^c x^{-1} = \ln c\to\infty$ והאינטגרל מתבדר.

אם $p\neq 1$ אז $\int_1^c x^{-p} = \frac{1}{-p+1}(c^{-p+1}-1)$ והגבול כאשר $c\to\infty$ לא קיים אם $p<1$, והוא $\frac{1}{p-1}$ אם $p>1$.

(iv) **נבדוק את $\int_0^1 x^{-p}$. כאן הבעיה היא ב־ 0. חישוב דומה ל־ (iii) מראה שכאשר $p<1$ מקבלים $\int_c^1 x^{-p} = \frac{1}{-p+1}(1-c^{-p+1})\to\frac{1}{1-p}$ כאשר $c\to 0$. ועבור $p\geq 1$ האינטגרל מתבדר.**

אם יש ל־ f מספר סינגולריות (ב־ $\pm\infty$ או מימין או משמאל בנקודות סופיות) יש לבדוק כל אחת מהן בנפרד, והאינטגרל המוכלל קיים רק כאשר הוא קיים בכל אחת מהן.

דוגמאות.

(i) האינטגרל $\int_0^\infty x^{-p}dx$ לא קיים לאף p, כי אם $p \geq 1$ אז $\int_0^1 x^{-p}dx$ לא מתכנס, ואם $p \leq 1$ אז $\int_1^\infty x^{-p}dx$ לא מתכנס.

(ii) הפונקציה $\frac{2x}{x^2+1}$ איזוגית, ולכן ניתן היה לחשוב כי $\int_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1} = 0$. יתר על כן, אם לא נזהרים, מחשבים כי $\int_{-R}^R \frac{2xdx}{x^2+1} = 0$ לכל R, וכשעוברים לגבול כאשר $R \to \infty$ אכן מקבלים 0.

אבל $\int_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$ לא קיים: שני האינטגרלים המוכללים $\int_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$ ו־ $\int_{-\infty}^0 \frac{2xdx}{x^2+1}$ לא קיימים.

לאינטגרל המוכלל יש התכונות הרגילות של האינטגרל:

$$\int \alpha f = \alpha \int f \quad ; \quad \int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2 \quad ; \quad \int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f$$

וכמו כן אם $f \leq g$ והאינטגרלים $\int f$ ו־ $\int g$ מתכנסים, אז $\int f \leq \int g$.

7.3.1 אינטגרלים מוכללים של פונקציות אי־שליליות.

בדוגמאות שראינו עד עכשיו בדיקת ההתכנסות של האינטגרל המוכלל נעשתה ע"י חישוב פונקציה קדומה. כידוע, חישוב כזה הוא בדר"כ בלתי אפשרי או קשה, ולכן חשוב למצוא דרכים לבדיקת ההתכנסות גם בלי חישוב כזה. בסעיף זה נעסוק במקרה שבו לפונקציה יש סימן קבוע (ובלי הגבלת הכלליות נניח שהיא אי שלילית). לפונקציות המחליפות סימן הבדיקה עדינה יותר, ונטפל במקרה זה בסעיף הבא.

משפט. תהי f אי־שלילית בקרן $[a, \infty)$ כך ש־ f אינטגרבילית בכל קטע חלקי $[a, x)$, ונסמן $F(x) = \int_a^x f$. אז $\int_a^\infty f$ קיים אםם F חסומה.

הוכחה. אי השליליות של f גוררת כי F מונוטונית עולה, וידוע כי לפונקציה מונוטונית יש גבול אםם היא חסומה.

משפט פשוט זה (והאנלוג שלו לאינטגרל מוכלל בקטע סופי) הם המפתח לכך שהטיפול באינטגרלים מוכללים של פונקציות בעלות סימן קבוע פשוט יותר מזה של פונקציות כלליות: במקום לבדוק קיום גבול יש רק לבדוק חסימות! זה מודגם היטב במשפט הבא:

משפט. [קריטריון ההשוואה]. תהיינה f ו־ g אי־שליליות בקרן $[a, \infty)$ ואינטגרביליות ב־ $[a, b]$ לכל $a < b < \infty$. אם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל x בקרן, ואם האינטגרל $\int_a^\infty g$ קיים , אז גם $\int_a^\infty f$ קיים ו־

$$\int_a^\infty f \leq \int_a^\infty g \ .$$

בפרט, אם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ו־ $\int f$ מתבדר (כלומר, לא מתכנס) אז גם $\int g$ מתבדר.

למורה: לשרטט

הוכחה. נסמן $F(x)=\int_a^x f$ ו־ $G(x)=\int_a^x g$. עפ"י הנתון G חסומה ו־ $0\le F\le G$, לכן גם F חסומה.

הערות. (i) כדי שהאינטגרל $\int_a^\infty f$ יתכנס אין צורך ש־ $0\le f(x)\le g(x)$ יתקיים לכל $x\ge a$, ומספיק שזה יתקיים על איזשהי קרן חלקית $[c,\infty)$, כלומר עבור ערכי x שהם גדולים מספיק.

כמו כן בשימושים נקבל בדר"כ הערכה מהטיפוס $0\le f(x)\le Kg(x)$ עבור איזשהו קבוע חיובי $K>0$. כמובן שגם זה מספיק להוכחת ההתכנסות של $\int_a^\infty f$.

(ii) ההנחה שהפונקציות אי־שליליות חיונית. מיצאו דוגמא שבה $f(x)\le g(x)$ והאינטגרל $\int g$ מתכנס, ופונקציה f שאיננה אי־שלילית כך ש־ $\int f$ מתבדר.

מסקנה. תהיינה $f,g\ge 0$ בקרן $[a,\infty)$ ואינטגרביליות בכל קטע חלקי $[a,b]$. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$ כאשר $0<L<\infty$, אז $\int^\infty f$ קיים אםם $\int^\infty g$ קיים.

הוכחה. לפי הגדרת הגבול נמצא $c>a$ כך ש־ $0<\frac{L}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3L}{2}$ לכל $x\ge c$, והמסקנה נובעת מהמשפט ע"י השוואות עם $\frac{L}{2}g$ ועם $\frac{3L}{2}g$.

הוכחה דומה מראה שאם $L=0$ ו־ $\int^\infty g$ קיים, אז גם $\int^\infty f$ קיים.

הערה. תוצאות אנלוגיות למשפט ולמסקנה תקפות גם לאינטגרלים מוכללים של פונקציות לא חסומות בקטע.

דוגמאות.

(i) האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$ מתכנס. ואמנם האינטגרנד הוא פונקציה זוגית ולכן די לבדוק כי האינטגרל מתכנס בקרן ימנית, אך $0<e^{-x^2}\le e^{-x}$ עבור $1\le x<\infty$, וראינו כבר כי $\int_1^\infty e^{-x}dx$ מתכנס.

(ii) $\int_0^1\frac{\sin x dx}{x^q}$ מתכנס אםם $q<2$. כי

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^q}\Big/\frac{1}{x^{q-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ולכן האינטגרל מתכנס אםם $\int_0^1\frac{dx}{x^{q-1}}$ מתכנס, וזה קורה אםם $p=q-1<1$, כלומר כאשר $q<2$.

7.3.2 אינטגרלים מתכנסים בהחלט ובתנאי

ההתכנסות של אינטגרל מוכלל של פונקציות אי שלילית תלויה ב"קצב הדעיכה" של f באינסוף, או ב"קצב הגידול" שלה בקטע סופי. כאשר f מקבלת גם ערכים חיוביים וגם שליליים האינטגרל יכול להתכנס מסיבה נוספת: התרומות החיוביות והשליליות של f יכולות לבטל חלקית אלה את אלה.

<u>הגדרה.</u> נאמר שהאינטגרל המוכלל $\int f$ (על קרן אינסופית או על קטע סופי) מתכנס בהחלט אם $\int |f|$ מתכנס. אם $\int f$ מתכנס אך $\int |f|$ לא מתכנס נאמר שההתכנסות היא בתנאי.

<u>משפט.</u> אם אינטגרל מוכלל מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס. כלומר, אם $\int_a^\infty |f| < \infty$ אז גם $\int_a^\infty f$ מתכנס, ובאופן דומה לאינטגרל המוכלל על קטע סופי.

למורה: לשרטט

<u>הוכחה.</u> נסמן

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} \qquad ; \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) > 0 \\ -f(x) & f(x) \leq 0 \end{cases} .$$

שתי הפונקציות האלה אי־שליליות ו־ $f = f^+ - f^-$ ואילו $|f| = f^+ + f^-$. אם $\int_a^\infty |f| < \infty$ אז ממשפט ההשוואה גם $\int_a^\infty f^+$ וגם $\int_a^\infty f^-$ מתכנסים, ואז מתכנס גם

$$\int_a^\infty f = \int_a^\infty f^+ - \int_a^\infty f^- .$$

<u>הערה.</u> בדיקת התכנסות בהחלט היא יחסית פשוטה כי יש לבדוק את התכנסות $\int |f|$ ו־ $|f|$ פונקציה אי־שלילית. בדיקת התכנסות בתנאי עדינה יותר, כפי שנראה בדוגמא (ii) להלן.

<u>דוגמאות.</u>

(i) האינטגרלים המוכללים $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$ ו־ $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ מתכנסים בהחלט כי $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ וגם $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ ו־ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty$.

(ii) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס, אך לא בהחלט. לבדיקת ההתכנסות נבצע אינטגרציה בחלקים

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{-\cos x}{x}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$$

והאינטגרל האחרון מתכנס עפ"י (i). (השתמשנו כאן בכתיבה פורמלית של נוסחת האינטגרציה בחלקים כשהגבול העליון הוא ∞. משמעות הנוסחה ־ והוכחתה! ־ היא שלוקחים גבול כאשר $b \to \infty$ בביטויים המתקבלים כשהגבול העליון הוא b).

האינטגרל אינו מתכנס בהחלט כי x $\sin^2 x \ge |\sin x|$ ונראה כי $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$ מתבדר. מהזהות $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ נקבל

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_1^\infty \frac{dx}{2x} - \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx$$

אבל $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$ ואילו $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$ מתכנס עפ"י (i).

****
סוף שעה 47
****

פרק 8

טורי מספרים

8.1 מושגים כלליים

נתונה סדרת מספרים $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$, ונרצה לסכם את כל אבריה ולדבר על הסכום האינסופי

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

ונעשה זאת ע"י תהליך גבולי. נסמן ב־ $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ את הסכום החלקי של n האברים הראשונים בסדרה.

הגדרה. נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס כאשר סדרת הסכומים החלקיים שלו, $\{S_n\}$, מתכנסת. אם גבולה הוא S $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ נאמר שסכום הטור הוא S ונסמן $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$.
אם $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ לא קיים נאמר שהטור מתבדר.

המינוח האנגלי הוא sequence (סדרה) ו־ series (טור).

הערה. אינדכס הסכימה k הוא רק שם למשתנה (כמו x ב־ $\int f(x)dx$). לפעמים יהיה נוח להשתמש בגבול תחתון שונה ונכתוב, למשל, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ או $\sum_{m=7}^{\infty} a_m$.
כשהגבול התחתון אינו משנה נכתוב לפעמים פשוט $\sum a_n$ בלי ציון הגבולות כלל.

דוגמאות.

(i) טור גיאומטרי אינסופי $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$.
כאשר $q \neq 1$ הסכומים החלקיים הם

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \ .$$

אם $|q| < 1$ אז הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ קיים, ולכן

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q} \ .$$

אם $|q| \geq 1$ הגבול לא קיים, והטור מתבדר. בפרט עבור $q = \pm 1$ מתקבלים הטורים המתבדרים $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \ldots$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - \ldots$.

(ii) הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ מתכנס וסכומו 1, כי נציג את האבר הכללי בצורה

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

ולכן

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) \ldots - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \end{aligned}$$

(סכום שבו ניתן להציג $a_k = b_k - b_{k-1}$, ולכן $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}) = b_n - b_0$, נקרא "סכום טלסקופי").

(iii) הטור $\sum \frac{1}{\sqrt{j}}$ מתבדר כי

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty \ .$$

(iv) נראה בהמשך ש"הטור ההרמוני" $\sum \frac{1}{k}$ מתבדר.

התכונות היסודיות של טורים מתקבלות ע"י תרגום של התוצאות האנלוגיות לסדרות. ההוכחה למשפט הבא מיידית ולא ניתן אותה.

<u>משפט.</u> אם הטורים $\sum a_k$ ו־ $\sum b_k$ מתכנסים, אז גם $\sum (\alpha a_k + \beta b_k)$ מתכנס וסכומו הוא $\alpha \sum a_k + \beta \sum b_k$. אם הטורים מתכנסים ובנוסף מתקיים ש־ $a_k \leq b_k$ לכל k אז $\sum a_k \leq \sum b_k$.

<u>משפט.</u> אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אז $\lim a_k = 0$.

<u>הוכחה.</u> נציג $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$

חשוב להדגיש שהמשפט נותן רק תנאי הכרחי שאיננו מספיק. ראינו למשל שהטור $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ מתבדר, למרות שסדרת אבריו שואפת לאפס.

הערות. (i) שינוי מספר סופי מאברי הטור אינו משפיע על התכנסותו או התבדרותו. (כאשר הטור מתכנס השינוי יכול, כמובן, להשפיע על ערך הסכום).

(ii) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, וסכומו S, אז ל־ $T_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ נקרא הזנב ה־ k־י של הטור. היות ש־ $T_k = S - S_k$ נקבל כי סדרת הזנבות T_k מתכנסת ל־0, $T_k \to 0$.

הטיפול בטורים אינסופיים דומה מאד לטיפול באינטגרלים מוכללים בקרן אינסופית ובהמשך נראה, בתנאים מסויימים, גם קשר פורמלי ביניהם.

8.2 טורים עם אברים חיוביים

כמו שעשינו באינטגרלים מוכללים, גם כאן נטפל תחילה בהתכנסות של טורים עם אברים בעלי סימן קבוע, ובה"כ נניח שהם חיוביים. המפתח לכך שהטיפול בטורים עם אברים בעלי סימן קבוע פשוט יותר מהטיפול בטורים כלליים הוא המשפט הבא

משפט. אם $a_n \geq 0$ לכל n, אז $\sum a_n$ מתכנס אםם סדרת הסכומים החלקיים S_n היא סדרה חסומה.

הוכחה. מאי השליליות של ה־ a_n־ים נובע שהסדרה S_n מונוטונית עולה, וידוע כי לסדרה מונוטונית יש גבול אםם היא חסומה.

המשפט מאפשר בדיקת ההתכנסות של טור חיובי ע"י בדיקה פשוטה יותר ־ עלינו רק לבדוק חסימות. אנחנו גם נשתמש (לטורים עם אברים חיוביים בלבד!) בסימון $\sum a_n < \infty$ לטור מתכנס וב־ $\sum a_n = \infty$ לטור מתבדר.

משפט. [קריטריון ההשוואה]. יהיו $\sum a_n$ ו־ $\sum b_n$ טורים עם אברים אי־שליליים. אם $0 \leq a_n \leq b_n$ לכל n, ואם הטור $\sum b_n$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס ו־ $\sum a_n \leq \sum b_n$.

הוכחה. נסמן ב־ $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ ו־ $B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ את הסכומים החלקיים של הטורים. עפ"י הנתון B_N סדרה חסומה ו־ $0 \leq A_N \leq B_N$ לכל N, לכן גם A_N חסומה ולכן מתכנסת. אי השוויון בין סכומי הטורים נובע ממעבר לגבול.

הערה. להתכנסות הטור $\sum a_n$ אין צורך לדרוש כי $0 \leq a_n \leq b_n$ לכל n ומספיק שיש N כך שזה יתקיים רק לכל $n > N$, כלומר עבור n גדולים מספיק ־ אך ברור שאז אי השוויון בין הסכומים אינו חייב להתקיים.
הערה דומה תהיה נכונה גם למשפטים רבים בהמשך ובדר"כ לא נציין אותה במפורש.

המסקנה המיידית הבאה נוחה מאד לשימוש.

מסקנה. נניח כי a_n, b_n חיוביים וכי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. אם $0 < L < \infty$ אז $\sum a_n$ מתכנס אםם $\sum b_n$ מתכנס.

הוכחה. לפי הגדרת הגבול נמצא N כך ש־ $0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$ לכל $n \geq N$, והמסקנה נובעת מהמשפט.

הוכחה דומה מראה שאם $L = 0$ ו־ $\sum b_n$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס.

דוגמאות.

(i) הטור $\sum \frac{1}{k^2}$ מתכנס, כי לכל $k > 1$ מתקיים ש־ $0 < \frac{1}{k^2} < \frac{2}{k(k+1)}$ והטור $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ מתכנס. לחילופין, אפשר להשתמש בכך ש־ $\lim \left(\frac{1}{k(k+1)} \Big/ \frac{1}{k^2}\right) = 1$ ובמסקנה.

(ii) לכל $x > 0$ קטן מתקיים $x/2 < \sin x < x$, ולכן הטורים $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ו־ $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (שהם בעלי אברים חיוביים) מתנהגים כמו שני הטורים $\sum \frac{1}{n}$ ו־ $\sum \frac{1}{n^2}$ בהתאמה ־ והטור ההרמוני $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר ואילו $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס. לחילופין, אפשר להשתמש במסקנה כי $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

שני מבחני ההתכנסות במשפט הבא הם שימושיים מאוד. שניהם נובעים בקלות ממשפט ההשוואה כאשר משווים עם טור גיאומטרי מתכנס.

משפט. יהיו a_n חיוביים.

(i) [מבחן השורש (קושי)] אם קיים $0 < q < 1$ כך ש־ $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ לכל n (פרט אולי למספר סופי מהם), אז הטור $\sum a_n$ מתכנס.

(ii) [מבחן המנה (ד'אלמבר)] אם קיים $0 < q < 1$ כך ש־ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ לכל n (פרט אולי למספר סופי מהם), אז הטור $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה. נניח לשם פשטות שהתנאים מתקיימים <u>לכל</u> n (ללא שום חריגים).

(i) נעלה את אי השוויון בחזקת n ונקבל כי $a_n \leq q^n$, ואגף ימין הוא האבר הכללי של טור גיאומטרי מתכנס.

(ii) רואים באינדוקציה כי $a_n \leq a_1 q^{n-1}$, ושוב אגף ימין הוא האבר הכללי של טור גיאומטרי מתכנס.

הערות. (i) תנאי המשפט בוודאי מתקיימים כאשר $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$ (או כאשר $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$).

(ii) נשים לב ששני המבחנים מבטיחים, כאשר $q < 1$, כי $a_n \to 0$ (כי $\sum a_n$ מתכנס). גם למסקנה פשוטה זו יש שימושים בבדיקת גבולות של סדרות. למשל, מדוגמא (ii) להלן מקבלים כי לכל מספר A מתקיים כי $\frac{A^n}{n!} \to 0$ (אם A שלילי נעבור לערכים מוחלטים).

דוגמאות.

(i) $\sum \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$ מתכנס כי מאי השוויונים $2^n+4^n < 2\cdot 4^n$ ו־ $3^n+5^n > 5^n$ נובע כי

$$\sqrt[n]{\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}} < \sqrt[n]{\frac{2\cdot 4^n}{5^n}} \to \frac{4}{5} < 1.$$

(ii) $\sum \frac{A^n}{n!}$ מתכנס לכל $A>0$, כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A}{n+1} \to 0 < 1$.

הערות. (i) אי השוויון החריף $q<1$ חשוב, והתנאי החלש יותר $\sqrt[n]{a_n} < 1$ לכל n (או $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$) אינו מספיק ואינו נותן שום אינפורמציה. לדוגמא, אם $a_n = \frac{1}{n^2}$ ו־ $b_n = \frac{1}{n}$ אז $\sqrt[n]{a_n} < 1$ וגם $\sqrt[n]{b_n} < 1$ לכל n, אך $\sum a_n$ מתכנס ו־ $\sum b_n$ מתבדר! (ובאופן דומה גם $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ו־ $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ לכל n).

(ii) אפשר לנסח "משפטים הפוכים". למשל, אם $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ לאינסוף n־ים אז הטור $\sum a_n$ מתבדר. אין טעם לנסות ולזכור אותם בע"פ כי בכולם הסיבה להתבדרות היא טריביאלית ־ האבר הכללי אינו שואף לאפס. בדוגמאות קונקרטיות קל לראות זאת ישירות ואין צורך ב"משפט" כללי.

המשפט הבא נותן קשר פורמלי בין התכנסות של טור להתכנסות אינטגרל מוכלל. שימו לב שמניחים בו לא רק חיוביות, אלא גם <u>מונוטוניות</u>.

משפט. [מבחן האינטגרל] תהי f פונקציה חיובית לא עולה בקרן $x \geq 0$, ואינטגרבילית בכל קטע חלקי. אז האינטגרל המוכלל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס אםם הטור $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ מתכנס ומתקיים

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) \leq \int_0^\infty f(x)dx \leq \sum_{k=0}^\infty f(k)\,.$$

למורה: לשרטט

הוכחה. נסמן $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$. היות שהפונקציה f יורדת, רואים מהשרטוט כי

$$S_n \leq \int_0^n f(x)dx \leq f(0) + S_{n-1}$$

ולכן הסדרה S_n חסומה (כלומר הטור מתכנס) אםם סדרת האינטגרלים $\int_0^n f$ חסומה (כלומר האינטגרל מתכנס).

מעבר לגבול נותן כי $\sum_{k=1}^\infty f(k) \leq \int_0^\infty f \leq \sum_{k=0}^\infty f(k)$.

דוגמאות.

המשפט, בצירוף השיטות שפיתחנו לחישוב והערכת אינטגרלים, מאפשר בדיקה פשוטה לטורים רבים.

(i) הפונקציה $\frac{1}{x^p}$ מונוטונית יורדת כאשר $p>0$, וראינו שהאינטגרל $\int^\infty \frac{dx}{x^p}$ מתכנס עבור $p>1$ ומתבדר עבור $p\le 1$. לכן גם הטור $\sum \frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p>1$ ומתבדר עבור $p\le 1$. בפרט, כפי שכבר נאמר, הטור ההרמוני $\sum \frac{1}{n}$ אכן מתבדר.

(ii) נבדוק לאילו ערכים של q הטור $\sum \frac{1}{k(\ln k)^q}$ מתכנס. הפונקציה $\frac{1}{x(\ln x)^q}$ מונוטונית יורדת כאשר $q>0$, וכשנציב באינטגרל $\int^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^q}$ את $y=\ln x$ (ואז $dy=\frac{dx}{x}$) ונקבל את $\int^\infty \frac{dy}{y^q}$ המתכנס אםם $q>1$.

(iii) המונוטוניות של f חשובה. אם, למשל, $f(x)=\begin{cases}1 & \text{שלם } x\\ e^{-x} & \text{אינו שלם } x\end{cases}$ אז $\sum f(n)=\sum 1$ מתבדר ואילו $\int_0^\infty f$ מתכנס.

8.3 טורים עם סימנים מתחלפים לסירוגין.

<u>משפט.</u>[לייבניץ] אם $a_n>0$ סדרה מונוטונית יורדת לאפס אז הטור $\sum(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס, וסכומו S מקיים $0<S<a_1$.

<u>הוכחה.</u> נדגים את ההוכחה עם הטור $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. נציג

$$S_{2n-1}=\frac{1}{1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)<1$$

ורואים מההצגה שזו סדרה מונוטונית יורדת. באופן דומה

$$S_{2n}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)>0$$

והסדרה S_{2n} מונוטונית עולה.

היות ש־ $0<S_{2n}=S_{2n-1}-\frac{1}{2n}<S_{2n-1}<1$, הרי ששתי הסדרות המונוטוניות האלה גם חסומות, ולכן הן מתכנסות. והיות ש־ $S_{2n}=S_{2n-1}-\frac{1}{2n}$ ו־ $\frac{1}{2n}\to 0$ יש להן גבול משותף שנסמנו ב־ S, כלומר הטור מתכנס וסכומו S.

אי השוויון שבמשפט נובע מכך שלכל n מתקיים $0<S_{2n}<S<S_{2n-1}<1$.

<u>דוגמא.</u>

הטור $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ מתכנס לכל $p>0$ (ולא, כמו הטור בלי השמת הסימנים, המתכנס רק עבור $p>1$). זו הקדמה טובה לנושא הבא שבו נטפל: השמת סימנים יכולה להביא לצמצומים שיגרמו להתכנסות הטור.

<u>הערה.</u> הנחת המונוטוניות חשובה. לדוגמא נגדיר

$$a_j=\begin{cases}1/k & \text{כאשר } j=2k-1 \text{ איזוגי}\\ 1/k^2 & \text{כאשר } j=2k \text{ זוגי}\end{cases}$$

ואז

$$. \quad S_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} a_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \to \infty$$

8.4 התכנסות בהחלט ובתנאי

הגדרה. נאמר שהטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס. אם הטור $\sum a_n$ מתכנס ־ אך לא בהחלט ־ נאמר שהוא מתכנס בתנאי.

משפט. טור מתכנס בהחלט הוא טור מתכנס. (הכיוון ההפוך אינו נכון כמובן: הטור $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס אך אינו מתכנס בהחלט).

הוכחה. נסמן

$$. \quad a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases} \qquad ; \qquad a_n^- = \begin{cases} 0 & a_n > 0 \\ -a_n & a_n \leq 0 \end{cases}$$

שני הטורים האלה אי־שליליים ו־ $a_n = a_n^+ - a_n^-$ ואילו $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. אם $\sum |a_n| < \infty$ אז ממשפט ההשוואה גם $\sum a_n^+$ וגם $\sum a_n^-$ מתכנסים, ואז מתכנס גם

$$. \quad \sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$$

דוגמא.

נבדוק עבור אילו x־ים הטור $\sum \frac{x^n}{n}$ מתכנס ומתי הוא מתכנס בהחלט.
עבור $|x| > 1$ האבר הכללי לא שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר.
עבור $|x| < 1$ הטור מתכנס בהחלט.
עבור $x = 1$ זה הטור ההרמוני המתבדר, ואילו עבור $x = -1$ הטור מתכנס (זה טור לייבניץ), אך לא בהחלט.

הערה. מבחני ההתכנסות לטורים חיוביים נותנים, ע"י מעבר מ־ a_n ל־ $|a_n|$, מבחנים דומים להתכנסות בהחלט, ואנחנו נשתמש בהם באופן חפשי.

****
סוף שעה 50
****

פרק 9

סדרות וטורים של פונקציות

9.1 התכנסות של סדרות וטורים של פונקציות

נתונה סדרת פונקציות $\{f_n\}$. בכל נקודה x שבה כולן מוגדרות נוכל לבדוק אם סדרת המספרים $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ או הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנסים או מתבדרים. בתחום שבו הסדרה (או הטור) מתכנסים הגבול (או הסכום) מגדירים פונקציה חדשה של המשתנה x.

דוגמאות.

(i) הפונקציות $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$ מוגדרות בכל הישר ו־ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ לכל x. כלומר, סדרת הפונקציות f_n מתכנסת לכל x, וגבולה הוא $f(x) \equiv 0$.

(ii) הפונקציות $f_n(x) = x^n$ מוגדרות בכל הישר ומקיימות $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ אם $x \in (-1,1)$ וכן $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$. עבור כל ה־$x$־ים האחרים הסדרה המספרית $\{f_n(x)\}$ איננה מתכנסת.

לכן פונקצית הגבול מוגדרת בקטע $(-1,1]$, וניתנת ע"י

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad .$$

(שימו לב ש־ f איננה רציפה למרות שכל הפונקציות f_n רציפות).

(iii) $\sum x^n$ מתכנס כאשר $|x| < 1$, כטור גיאומטרי עם $q = |x| < 1$, וסכומו שם הוא $\frac{1}{1-x}$. הטור מתבדר עבור $|x| \geq 1$ (כי האבר הכללי אינו שואף לאפס).

(iv) הטור $\sum \frac{\sin 3^n x}{2^n}$ מתכנס בהחלט לכל x (עפ"י משפט ההשוואה), אך אין לנו נוסחה לסכומו.

(iv) הטור $\sum (-1)^n \sin \frac{x}{n}$ מתכנס לכל x עפ"י משפט לייבניץ: לכל x הסדרה $\sin \frac{x}{n}$ שואפת לאפס, והחל ממקום מסוים <u>התלוי ב־ x</u> השאיפה היא <u>מונוטונית</u>.

<u>הערה.</u> אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס לכל x בקטע I אז האבר הכללי שלו מקיים $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ לכל x בקטע. ההפך אינו נכון כמובן.

9.2 טורי פונקציות

המשפט הבא הוא המכשיר העיקרי לבדיקת התכנסות טורי פונקציות.

משפט. [ויירשטראס] נניח שהפונקציות f_n מוגדרות בקטע I (שיכול להיות סופי או אינסופי) ויש קבועים M_n כך ש־ $|f_n(x)| \leq M_n$ לכל $x \in I$ וכך שטור המספרים $\sum M_n$ מתכנס. אז

(i) טור הפונקציות $\sum f_n$ מתכנס בהחלט בקטע.

(ii) אם כל הפונקציות f_n רציפות ב־ I אז גם פונקצית הסכום $f = \sum f_n$ היא רציפה.

(iii) אם כל הפונקציות f_n אינטגרביליות ב־ $I = [a,b]$ ואם $f = \sum f_n$ אז מתקיים השוויון $\int_a^b \sum f_n = \int_a^b f = \sum \int_a^b f_n$.

הוכחה. נוכיח רק את (i) ואת הנוסחה ב־ (iii).

(i) לכל x קבוע הטור המספרי $\sum f_n(x)$ מתכנס בהחלט ע"ס מבחן ההשוואה.

(iii)

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f - \sum_{n=1}^{N}\int_a^b f_n\right| &= \left|\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n - \int_a^b \sum_{n=1}^{N} f_n\right| = \left|\int_a^b \sum_{n>N} f_n\right| \\ &\leq \sum_{n>N}\int_a^b |f_n| \leq \sum_{n>N}(b-a)M_n \to 0\end{aligned}$$

כי הטור $\sum M_n$ מתכנס.

דוגמאות.

(i) אם $0 < r < 1$ אז הטור $\sum x^n$ מקיים את תנאי משפט ויירשטראס בקטע $[-r,r]$ (עם $M_n = r^n$), ולכן סכומו פונקציה רציפה ב־ $(-1,1)$. (למעשה זהו טור גיאומטרי אינסופי וסכומו ידוע לנו: $\frac{1}{1-x}$). כשנבצע איטגרציה אבר אבר (עפ"י חלק (iii) המשפט) נקבל כי לכל $|t| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum\int_0^t x^n dx = \int_0^t \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x)\Big|_0^t = -\ln(1-t)\ .$$

וכשנציב, למשל, $t = 1/2$ בנוסחה זו נקבל את הנוסחה

$$\ln 2 = -\ln\frac{1}{2} = \sum\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

שמאפשרת חישוב מקורב די יעיל של $\ln 2$.

(ii) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3^n x}{2^n}$ מקיים את תנאי משפט ויירשטראס עם $M_n = 2^{-n}$. עפ"י המשפט הטור מתכנס וסכומו, $f(x)$, הוא פונקציה רציפה. ויירשטראס הוכיח את הדבר המדהים הבא: הפונקציה f הזו איננה גזירה באף נקודה!

כפי שדוגמא (ii) לעיל מראה, סכום של טור מתכנס שאבריו הם פונקציות גזירות אינו חייב להיות פונקציה גזירה. המשפט הבא (שאותו לא נוכיח) נותן תנאים שבהם הסכום כן גזיר ־ ביחד עם נוסחה לנגזרת.

משפט. תהיינה f_n פונקציות גזירות בקטע I כך שהטור $\sum f_n(x)$ מתכנס לכל x בקטע, ונסמן ב־ $f(x)$ את סכום הטור. אם הנגזרות f'_n מקיימות את תנאי משפט ווירשטראס אז f גזירה בכל נקודה x בקטע, ומתקיים השוויון $f'(x) = \sum f'_n(x)$.

9.3 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. נשים לב כי כמו עבור פולינומים (כלומר סכומים סופיים כאלה) המחובר עם $n = 0$ הוא "האבר החופשי" a_0. טורי חזקות הם הכללה של פולינומים לסכומים אינסופיים, ויש להם תכונות מאד מיוחדות.

לשם פשטות הסימונים נבצע הזזה ב־ x_0, וכך נרשום בד"כ את הטענות למקרה המיוחד שבו $x_0 = 0$, כלומר, נסתכל בטורים מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

כל טור חזקות $\sum a_n x^n$ מתכנס בנקודה $x = 0$, וערכו ב־ $x = 0$ הוא a_0. מה עוד אפשר לאמר על תחום ההתכנסות?

דוגמאות.

(i) הטור $\sum \frac{x^n}{n!}$ מתכנס לכל x ומקיים בכל קטע סופי $[-r, r]$ את תנאי משפט ווירשטראס: $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \le \left|\frac{r^n}{n!}\right|$ לכל x בקטע והטור $\sum \frac{r^n}{n!}$ מתכנס לכל r עפ"י מבחן המנה.

(ii) ראינו שהטור $\sum x^n$ מתכנס בקטע $(-1, 1)$ ומתבדר עבור $|x| \ge 1$.

(iii) תחום ההתכנסות של הטור $\frac{x^n}{n}$ הוא הקטע $[-1, 1)$.

(iv) הטור $\sum n^n x^n$ מתבדר לכל $x \ne 0$, כי אם $n \ge \frac{1}{|x|}$ אז $|n^n x^n| \ge 1$, ולכן האיבר הכללי בטור אינו שואף לאפס.

בכל הדוגמאות תחום ההתכנסות הוא קטע סימטרי סביב אפס (שיכול גם להיות כל הישר, או קטע מנוון ל־ 0 בלבד), פרט אולי לאי סימטריה בנקודות הקצה. המשפט הבא אומר שזה המצב הכללי.

משפט. (i) לכל טור חזקות $\sum a_n x^n$ יש מספר $0 \le R \le \infty$, הנקרא רדיוס התכנסות של הטור, כך שהטור מתכנס בקטע $(-R, R)$ ומתבדר עבור $|x| > R$ (כאשר $R = \infty$ הפירוש הוא שהטור מתכנס לכל x ו־ $R = 0$ פירושו שהטור איננו מתכנס לאף $x \ne 0$). בנקודות $x = \pm R$ עצמן הטור יכול או להתכנס או להתבדר.

יתר על כן, אם $0 \le r < R$ אז הטור מקיים את תנאי משפט ווירשטראס בקטע $[-r, r]$.

(ii) אם $\lambda = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ קיים אז $R = \frac{1}{\lambda}$.

(iii) אם $\mu = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ קיים, אז $R = \frac{1}{\mu}$.

הוכחה. הנוסחה הכללית ב־ (ii) היא $R = \frac{1}{\lambda}$ כאשר $\lambda = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, ודי להוכיח נוסחה מפורשת זו, המוכיחה בפרט את קיומו של R. ובאמת, אם $r < \frac{1}{\lambda}$ נבחר K כך ש־ $\frac{1}{r} > K > \lambda$, ואז ע"ס הגדרת הגבול העליון יש N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים כי $\sqrt[n]{|a_n|} < K$. אם $|x| \leq r$ נקבל כי

$$|a_n x^n| \leq K^n r^n = q^n$$

כאשר $q = Kr < 1$. ולכן הטור $\sum a_n x^n$ מקיים את תנאי משפט ויירשטראס בקטע $[-r, r]$.

להפך, אם $|x_0| > \frac{1}{\lambda}$ אז $\limsup \sqrt[n]{|a_n x_0^n|} = \lambda |x_0| > 1$, ולכן האבר הכללי של הטור $\sum a_n x_0^n$ אינו שואף לאפס ־ והטור בוודאי אינו מתכנס.

הערה. אי אפשר להכליל את נוסחת המנה ב־ (iii) למקרה שהגבול לא קיים כי אם, למשל, חלק מה־ a_n־ים מתאפסים אז המנות המתאימות אינן מוגדרות כלל.

דוגמאות.

(i) רדיוס ההתכנסות של $\sum \frac{x^n}{n!}$ הוא $R = \infty$ כי $\mu = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$.

(ii) רדיוסי ההתכנסות של $\sum x^n$ ושל $\frac{x^n}{n}$ הם 1 עפ"י שתי הנוסחאות.

(iii) רדיוס ההתכנסות של $\sum n^n x^n$ הוא 0 עפ"י נוסחת השורש.

(iv) רדיוס ההתכנסות של $\sum x^{2n}$, או באופן כללי יותר של $\sum_{j=1}^{\infty} x^{n_j}$ הוא $R = 1$, ובדוגמאות אלה יש אכן להשתמש בנוסחת השורש בגירסתה הכללית (עם גבול עליון), כי $\lim \sqrt[n]{a_n}$ לא קיים.

כפי שכבר אמרנו, פונקציות המתוארות ע"י טור חזקות מתכנס הן בעלות תכונות מיוחדות. המשפט הבא (הנובע ישירות מהמשפטים הכלליים שניסחנו) מראה שביחס לתכונות הרציפות, הגזירות והאינטגרביליות אפשר להתייחס אליהן כאל סכומים סופיים, כלומר, כאילו היו פולינומים.

משפט. נתון טור $\sum a_n x^n$ בעל רדיוס התכנסות R ונסמן את סכומו ב־ $f(x)$. אז

(i) הפונקציה f רציפה בתחום ההתכנסות של הטור.

(ii) רדיוס ההתכנסות של טור האינטגרלים $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ גם הוא R, ולכל r המקיים $0 \leq r < R$ הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[-r, r]$ ומתקיים שם

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \ .$$

(iii) רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ גם הוא R, הפונקציה f גזירה בקטע $(-R, R)$ ומתקיים שם

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ .$$

(שימו לב שהאבר הקבוע $a_0 x^0$ "נופל" בגזירה).

(iv) הפונקציה f גזירה מכל סדר בקטע $(-R,R)$ ולכל p טבעי מתקיים

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+p)(m+p-1)\cdot\ldots\cdot(m+1)a_{m+p}x^m \end{aligned}$$

ולכל הטורים האלה יש אותו רדיוס התכנסות R.

__הוכחה.__ לא נפרט את ההוכחה, ונציין רק כי שני החלקים הראשונים נובעים ישירות ממשפט ווירשטראס, ושני החלקים האחרים נובעים מחלק (ii): בחלק (iii) מבצעים אינטגרציה איבר איבר של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$, ובחלק (iv) משתמשים p פעמים ב־ (iii).

נניח כי $f(x)=\sum a_p x^p$ בקטע $(-R,R)$, ונציב $x=0$ בנוסחה שבחלק (iv) של המשפט, ואז נקבל כי $f^{(p)}(0)=p(p-1)\cdot\ldots\cdot1\cdot a_p$ או

$$a_p=\frac{f^{(p)}(0)}{p\,!},\quad p=0,1,\ldots$$

כלומר

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{f^{(p)}(0)}{p\,!}x^p,\quad -R<x<R \; .$$

נוסחה זו קשורה באופן הדוק לנוסחת טיילור עם שארית האומרת שאם f גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה $x=0$ אז $f=T_n+R_n$ בסביבה, כאשר T_n פולינום טיילור ממעלה n ו־ R_n השארית, והם ניתנים ע"י

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad ; \qquad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{(n+1)}$$

עבור איזשהו $c=c_x$ בין 0 ל־ x.

קשר זה נותן לנו את המפתח לדיון בשאלה החשובה הבאה: נתונה פונקציה f המוגדרת בסביבת $x=0$. באיזה תנאים אפשר להציג אותה שם כסכום של טור חזקות? אם יש הצגה כזו אז הסכום החלקי ה־ n־י הוא בדיוק פולינום טיילור T_n שלה, ולכן ניסוח שקול לשאלה הוא מתי $R_n(x)\to0$.

תנאי מוקדם לקיום הצגה כזו הוא ש־ f צריכה להיות גזירה אינסוף פעמים, אך תנאי הכרחי זה אינו מספיק. אפשר להראות, למשל, שהפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

גזירה אינסוף פעמים ומקיימת $f^{(n)}(0)=0$ לכל n. לכן $T_n\equiv0$ לכל n ו־ $R_n=f$ לכל n, ובוודאי ש־ $R_n(x)\not\to0$.

המשפט הבא הוא ניסוח מחדש של משפט שראינו בדיון על פיתוח טיילור.

משפט. תהי f גזירה מכל סדר ב־ $(-r,r)$, ונניח שיש קבוע M כך שלכל n ולכל $|x|<r$ מתקיים $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$. אז $R_n(x)\to 0$ ולכן טור החזקות $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ מתכנס בקטע $(-r,r)$. כלומר, רדיוס ההתכנסות R של טור החזקות מקיים $R\ge r$.

אם יש ל־ f הצגה כטור חזקות, $f(x)=\sum a_n x^n$, נקרא לטור "טור טיילור של f". באופן כללי יותר, אם יש ל־ f הצגה כטור חזקות, $f(x)=\sum a_n(x-x_0)^n$, נקרא לטור "טור טיילור של f סביב הנקודה x_0".

שימו לב שלעתים קרובות תחום ההתכנסות של הטור חלקי ממש לתחום שבו f מוגדרת.

דוגמאות.

(i) $f(x)=e^x$.

כאן $f^{(n)}(x)=e^x$ לכל n. ולכן לכל $r>0$ מתקיים ש־ $|f^{(n)}(x)|\le e^r$ לכל $|x|\le r$. על סמך המשפט הטור מתכנס בקטע $(-r,r)$ ־ אבל $r>0$ היה שרירותי ולכן $R=\infty$. כמו כן $f^{(n)}(0)=1$ לכל n, ולכן לכל x מתקיים

$$e^x=\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}\ .$$

בפרט $e=\sum_0^\infty \frac{1}{n!}$ ו־ $e^{-1}=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}$.

(ii) $f(x)=\sin x$.

כאן $f^{(n)}(x)$ הוא $\pm\sin x$ או $\pm\cos x$, ובפרט $|f^{(n)}(x)|\le 1$ לכל x ולכל n ולכן $R=\infty$.

כמו כן $f^{(2m)}(0)=\pm\sin 0=0$ ואילו $f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m\cos 0=(-1)^m$ ולכן לכל x מתקיים

$$\sin(x)=\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}\ .$$

תרגיל: הראו כי $\cos x=\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$.

(iii) הטור $\sum_{k=0}^\infty x^k$ הוא טור גיאומטרי שמתכנס עבור $|x|<1$ לפונקציה $\frac{1}{1-x}$. ע"י גזירה איבר איבר נקבל נוסחאות חדשות:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{k=0}^\infty x^k\right)'=\sum_{k=1}^\infty kx^{k-1}=\sum_{m=0}^\infty (m+1)x^m\ .$$

גזירה נוספת נותנת

$$\begin{aligned}\frac{2}{(1-x)^3} &= \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\left(\sum_{m=0}^\infty (m+1)x^m\right)'\\ &= \sum_{m=1}^\infty (m+1)mx^{m-1}=\sum_{n=0}^\infty (n+2)(n+1)x^n\end{aligned}$$

(iv) אפשר גם לקבל נוסחאות מעניינות ע"י אינטגרציה איבר איבר. למשל

$$-\log(1-x)=\int_0^x \frac{dt}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^k dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\ .$$

חישוב דומה (או ההצבה $t=-x$) נותנים כי $\log(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$.

(v) בתוך תחומי ההתכנסות אפשר לעשות בטורי חזקות מניפולציות כמו שעושים בפולינומים. למשל, אפשר להציב $x=-t^2$ בטור עבור $\frac{1}{1-x}$ ונקבל $\frac{1}{1+t^2}=\sum(-1)^n t^{2n}$ עבור $|t|<1$. אינטגרציה איבר איבר של הטור החדש נותנת

$$\arctan x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

עבור $|x|<1$.

<u>**הערה.**</u> אם טור טיילור $f(x)=\sum a_n x^n$ של f ידוע (כמו למשל בדוגמאות האחרונות) אז אפשר להשתמש בנוסחה $f(x)=\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ "בכיוון ההפוך" ולחשב את $f^{(n)}(0)$ ע"י השוואת מקדמים: המקדמים בשתי ההצגות הם בהכרח אותם המקדמים, ולכן $f^{(n)}(0)=n!\,a_n$.

למשל, מהנוסחה $-\log(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ נובע כי

$$\big(-\log(1-x)\big)^{(1000)}=\tfrac{1000!}{1000}=999!\ .$$

9.4 דוגמא לשימוש בטורי חזקות

משוואה דיפרנציאלית היא משוואה המתארת את הקשרים בין הנעלם, הפונקציה $y=y(x)$, לבין נגזרותיה. למשל, $y^2+e^x y'-xy''=\sin x$. זה נושא חשוב מאוד שתלמדו באופן שיטתי בקורסים במד"ר או במערכות דינמיות ובקורס במד"ח. כאן נדגים רק איך אפשר להשתמש בטורי חזקות כדי לפתור את המשוואה הפשוטה ביותר, $y'=y$. (למרות שאנחנו, כמובן, מכירים את פתרונה: אם ננרמל $y(0)=1$ אז $y=e^x$).

תורת המשוואות הדיפרנציאליות מבטיחה שבמקרים מסויימים (המתקיימים כאן) הפתרון למשוואה ניתן לתיאור כטור חזקות. נכתוב לכן $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, וננסה לחשב את המקדמים a_n.

נגזור את הטור ונקבל כי $y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$, ונשווה את המקדמים של x^n בשני האגפים של המשוואה $y=y'$. באפן כזה נהפוך את המשוואה הדיפרנציאלית לאוסף (אינסופי) של משוואות <u>מספריות</u>:

$$a_0=a_1\quad ;\quad a_1=2a_2\quad ;\quad a_2=3a_3\ ;\ \ldots\ ;\ a_n=(n+1)a_{n+1}\quad\ldots$$

וכשנתחיל מהנתון $a_0 = y(0) = 1$ ונמשיך באופן אינדוקטיבי נקבל

$$a_1 = a_0 = 1 \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} \quad \ldots$$

ומוכיחים באינדוקציה כי $a_n = \frac{1}{n!}$, ולכן $y = \sum \frac{x^n}{n!} = e^x$.