

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב -- המחלקה למתמטיקה
חדו"א להנדסת מכונות 1 (201--1--9711) -- סמסטר א' תשע"ד
תרגיל 9

1. הוכיחו כי הפונקציה $\frac{\sin(x)}{x}$ מונוטונית יורדת ממש בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$. כלומר: הראו ש- $f'(x) < 0$ לכל $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

2. א. התבוננו בפונקציה $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$ והוכיחו כי $0 < f(x) < 1$ בקטע $(0, \infty)$.
 רמז: חלקו את הקטע $(0, \infty)$ לשני קטעים $(0, \frac{\pi}{2})$ ו- $[\frac{\pi}{2}, \infty)$. כדי להוכיח שהפונקציה חסומה בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$ העזרו בעובדה שבקטע זה $x < \tan(x)$ וכן שמהגדרתה $\arctan(x)$ היא פונקציה עולה ב- \mathbb{R} .

ב. הראו שהפונקציה אינה מקבלת מקסימום בקטע זה.
 רמז: הראו תחילה בעזרת כלל לופיטל ש-

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

3. תהי $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ הנתונה ע"י $f(x) = 2x + \ln(x)$.

(א) מצאו את התמונה של f .

(ב) הוכיחו כי f הינה הפיכה. רמז: האם הפונקציה מונוטונית?

4. מצאו את המקסימום ואת המינימום המוחלטים (גלובליים) של הפונקציות הבאות בקטעים הנתונים:

$\frac{1}{2x^4 + x + 1}, [-2, 1]$ (א)	$e^x \sin(x), [0, 3\pi]$ (ג)
$\sin^4(x) + \cos^4(x), (-\infty, +\infty)$ (ב)	$\frac{5x^4 + 1}{x^2 - 4}, [-1, 1]$ (ד)

5. מצאו את כל הנקודות הקיצון המקומי של הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הנתונה ע"י

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

שאלת רשות: האם f גזירה בנקודה $x = 0$?

6. מצאו את אורכו ורוחבו של מלבן שהיקפו 40 מ' ושטחו גדול ככל האפשר.

7. מלבן חסום בחצי מעגל שרדיוסו R . בטאו את ממדי המלבן, בעזרת R אם ידוע ששטחו הוא המקסימלי האפשרי.

8. חשבו את הגבולות הבאים. רמז: כלל לופיטל.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \cdot \ln x)$ (א)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{10} - 2x + \sin(2x)}{x^9 + 3x - \sin(3x)}$ (ג)
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^x$ (ב)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$ (ד)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin(2x)} \right) \quad (\text{ה})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x^2}} \quad (\text{ו})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{e^x - e^2 \cos(\pi x)} \quad (\text{ז})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \quad (\text{ח})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \quad (\text{ט})$$

9. חשבו את $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ עד כדי שגיאה של לכל היותר 10^{-3} .

10. חשבו ברמת דיוק של 10^{-4} את \sqrt{e} .

11. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת נוסחת טיילור.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin(x) - 6x + x^3}{x^5} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^5)}{x^4 - x \sin(x^3)} \quad (\text{ב})$$