

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה  
 חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) - סמסטר א' תשע"ד  
 תרגיל 7

1. מיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} & x \neq \pm 2 \\ 1 & x = \pm 2 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}} & x \neq \pm 1, 0 \\ 0 & x = \pm 1, 0 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

2. בכל אחד מהסעיפים הבאים, חשבו את הערך  $a$  שעבורו הפונקציה הנתונה תהיה רציפה בכל תחום הגדרתה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 3 \\ 2ax & x \geq 3 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & x > 0 \\ x + a & x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x > a \\ e & x \leq a \end{cases} \quad (\text{ד})$$

3. הראו כי לפונקציה  $f(x) = 2^x + 2x - 3$  יש שורש בקטע  $[0, 1]$ , ומצאו אותו עד כדי קירוב של 0.1.

4. הראו כי למשוואה  $x^3 - 15x + 1 = 0$  יש שלושה פתרונות בקטע  $[-4, 4]$ .

5. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

(א) אם המכפלה  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  רציפה ב- $0$ , אז כל אחת מהפונקציות  $f(x), g(x)$  רציפה ב- $0$ .

(ב) אם הפונקציה  $f(x)$  רציפה בקטע  $[a, b]$  ואינה מתאפסת באף נקודה בקטע, אזי היא בעלת סימן קבוע בקטע זה.

(ג) אם הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בקטע  $[a, b]$  ומתקיים  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , אזי יש נקודה בקטע שבה  $f$  מתאפסת.

(ד) אם הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בקטע  $[a, b]$  אזי  $f$  חסומה בקטע.

(ה) אם הפונקציה  $f(x)$  רציפה בקטע  $[a, b]$  אזי תמונת  $f$  היא קטע סגור.

6. הוכיחו את המשפט הבא:

**משפט נקודת השבת:** תהי  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  פונקציה רציפה. אזי יש נקודה  $0 \leq c \leq 1$  כך ש-  
 $f(c) = c$

רמז: הגדירו פונקציה  $g(x) = f(x) - x$  והשתמשו במשפט ערך הביניים.

7. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות בנקודות הנתונות תוך שימוש בהגדרת הנגזרת:

(א) בנקודה  $a = 2$   $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 1$

(ב) בנקודה  $a = \pi$   $f(x) = \cos x$

8. הוכיחו כי הפונקציה  $f(x) = \sqrt{|x|}$  רציפה ב-0 אך לא גזירה שם.

**חנוכה שמח!**