

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה  
 חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) - סמסטר א' תשע"ד  
 תרגיל 2

1. מצאו את התמונה של הפונקציות הבאות:

(א)  $f(x) = x^2 - 2x + 2, f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

(ב)  $f(x) = x^2 - 200x + 7, f: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$

(ג)  $f(x) = x^3 + 2, f: \{3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{Q}$

2. בכל אחד מהסעיפים הבאים, רישמו ביטוי מפורט עבור הפונקציות  $f \circ g$  ו-  $g \circ f$ , וכן את תחומי ההגדרה הטבעיים של  $g \circ f, f \circ g, g, f$ :

(א)  $g(x) = x^2, f(x) = \sqrt{x}$

(ב)  $g(x) = 2^x, f(x) = \log_4(x)$

(ג)  $g(x) = x^2, f(x) = \log_{10}(x)$

(ד)  $g(x) = \arcsin(x), f(x) = \sin(5x + 1)$

(ה)  $g(x) = \cos(x), f(x) = \arcsin(x)$

3. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות בדקו אם הפונקציה חד-חד ערכית בתחום הגדרתה. במידה וכן, מצאו את הפונקציה ההופכית ואת תחום הגדרתה:

(א)  $x \geq 0, f(x) = -x^2$

(ב)  $0 \leq x \leq 1, f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(ג)  $f(x) = x^3 + 1$

(ד)  $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(ה)  $-3\pi \leq x \leq -2.5\pi, f(x) = \cos(x)$

(ו)  $0 \leq x \leq \sqrt{5}, f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)$

4. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבעו האם הפונקציה היא מונוטונית עולה, מונוטונית יורדת, מונוטונית עולה ממש, מונוטונית יורדת ממש, או שאינה מונוטונית:

(א)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

(ב)  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$

(ג)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$

(ד)  $f: (-2, \infty) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \frac{1}{2x+4}$

(ה)  $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

(ו)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$  פונקציה זו נקראת "פונקציית הערך השלם", והיא מתאימה לכל מספר ממשי את המספר השלם המקסימלי הקטן או שווה לו.

הערה: יש לענות על שאלה זו ללא שימוש במושג הנגזרת.

5. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבעו האם הפונקציה מחזורית, ואם כן, חשבו את המחזור שלה.

(א)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

(ב)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(3x)$

(ג)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(3x) + \cos\left(\frac{x}{4}\right) \quad (\text{ד})$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor \quad (\text{ה})$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor - x \quad (\text{ו})$$

6. הוכיחו באינדוקציה את הטענה הבאה: אם  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה מחזורית בעלת מחזור  $T$ , אז לכל מספר טבעי  $n$  ולכל  $x$  ממשי מתקיים  $f(x + nT) = f(x)$

7. תהי  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  סידרה המתכנסת ל-1. הוכיחו שקיים  $N$  כך שלכל  $n \geq N$  מתקיים כי  $a_n < 4$ .

8. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 23n^2 - 2008n + 3}{5n^3 + n^2 + 2} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 10}{n^2 - 2008n - 1} \quad (\text{ב})$$