

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
 חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) - סמסטר א' תשע"ד
 תרגיל 11

1. (א) הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(ב) חשבו $\int_0^1 x^3 dx$ ע"פ הגדרת האינטגרל המסויים.

(ג) חשבו $\int_{-1}^0 x^3 dx$ ע"פ הגדרת האינטגרל המסויים.

(ד) השתמשו בסעיפים הקודמים כדי לחשב את $\int_{-1}^1 x^3 dx$.

2. חשבו את $\int_0^t e^x dx$ ע"פ הגדרת האינטגרל המסויים, כאשר $t > 0$ מספר קבוע.

רמז: סכום האיברים הראשונים של סדרה הנדסית עם האיבר הראשון a_1 , ומנה q הוא $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

3. חשבו את השטח התחום החסום בין גרפי הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = x^3$.

4. הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

(א) $0 \leq \int_1^5 \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{4}{e}$

(ב) $2\sqrt{2} \leq \int_1^3 \sqrt{x^2 + 1} dx \leq 2\sqrt{10}$

(ג) $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$

5. (א) חשבו את $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

רמז: שטח המעגל עם רדיוס r הוא πr^2 .

(ב) חשבו את $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$.

רמז: האם מדובר בגבול של סכומי רימן של האינטגרל בסעיף הקודם?

6. חשבו את $\int_{0.25}^{4.3} [x] dx$.

7. חשבו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה- x של הפונקציה $f(x) = 3x - 2$ בקטע $[1, 3]$.

8. הוכיחו כי נפח החרוט בעל גובה h ורדיוס בסיס r הוא $\frac{\pi r^2 h}{3}$.

רמז: מצאו שיפוע $m \in \mathbb{R}$ מתאים כך שגוף הסיבוב סביב ציר ה- x של $y = mx$ בקטע $[0, h]$ מהווה חרוט בעל גובה h ורדיוס בסיס r .

9. יהי L אורך הגרף של $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ כאשר $x \in [1, 3]$. הוכחו כי $\frac{\sqrt{39}}{3} \leq L \leq \sqrt{5}$.