

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה  
 חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) - סמסטר א' תשע"ד  
 תרגיל 10

1. הוכיחו שלכל  $x$  בקטע  $[0, 1]$  מתקיים:

$$x^{123}(1-x)^{321} \leq \frac{123^{123} \cdot 321^{321}}{444^{444}}.$$

רמז: מצאו את המקסימום של הפונקציה  $f(x) = x^{123}(1-x)^{321}$  בקטע  $[0, 1]$ .

2. מצא את שטח הפנים המינימלי של חבית בצורת גליל שנפח שלה הוא  $1000\text{cm}^3$ .

3. סולם נשען בחלקו התחתון על קרקע אופקית ובחלקו העליון על קיר אנכי. הסולם מחליק כלפי מטה במהירות אנכית קבועה של 10 סנטימטר לשנייה.

(א) מהי המהירות הרגעית שבא בסיס הסולם מתרחק מהקיר כאשר הזווית בין הסולם לקרקע היא  $\frac{\pi}{3}$ ?

(ב) מהי המהירות הרגעית שבא בסיס הסולם מתרחק מהקיר כאשר הזווית בין הסולם לקרקע היא  $\frac{\pi}{4}$ ?

4. בריכה שצורתה היא חרוט הפוך עם זווית פתיחה של  $\pi/2$  מלאה ב-10 ליטר מים. ברגע מסוים נפתח פתח בתחתית הבריכה והמיים מתחילים לזרום החוצה בקצב של 2 ליטר לשנייה. מהו קצב ירידת מפלס המים ברגע בו נפתח הפתח?

5. (א) הוכיחו שלכל  $0 < x < y$  ו- $a \geq 1$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^a \leq \frac{1}{2}x^a + \frac{1}{2}y^a$$

(ב) הוכיחו שלכל  $x > 0$  מתקיים

$$\arctan(x+1) - \arctan(x) \geq \arctan(x+2) - \arctan(x+1)$$

רמז: קמירות וקעירות, או מונוטוניות של הנגזרת.

6. עצם נגרר במישור אופקי על ידי חבל בזווית  $\theta$  לקרקע. הכוח הנדרש כדי לגרור את העצם במהירות קבועה הוא

$$F = \frac{\mu W}{\mu \sin \theta + \cos \theta},$$

כאשר  $W > 0$  הוא משקל העצם, ו- $\mu$  הוא קבוע חיובי הנקרא מקדם החיכוך. באיזה זווית  $\theta$  הכוח הנדרש לגרירת הגוף הוא מינימלי?

הערה: התשובה אמורה להיות ביטוי התלוי ב- $\mu$ .

7. תהי  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ .

(א) האם יש ל- $f$  אסיפטוטה אנכית? נמקו!

(ב) האם יש ל- $f$  אסיפטוטה אופקית? נמקו!

(ג) האם הגרף של פונקציה (כלשהי) יכול להחתך עם אסיפטוטה אנכית שלה? נמקו!

(ד) האם הגרף של פונקציה (כלשהי) יכול להחתך עם אסיפטוטה אופקית שלה? אם כן כמה פעמים? נמקו!

8. עבור הפונקיות הבאות: מצאו את תחום ההגדרה, נקודות קיצון מקומיות, תחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול, אסיפטוטות אופקיות ואנכיות במידה וקיימות. שרטטו סקיצה של הגרף.

$$f(x) = \frac{x^2+7x+3}{x^2} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = \cos^2(x) - 2 \sin(x) \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \sqrt{x}e^{-x} \quad (\text{ד})$$

$$f(x) = e^{2x} - e^{-x} \quad (\text{ה})$$

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)} \quad (\text{ו})$$

$$f(x) = x \tan(x) \quad (\text{ז})$$

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \quad (\text{ח})$$

הערה: בסעיף ז אין צורך למוצא נקודות פיתול, ותחומי קמירות וקעירות.