חדו"א להנדסת מכונות **שיעור 1 חלק ב**

1. סדרת מספרים היא פונקציה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ אותה נהוג להציג על ידי נוסחת הסדרה $a_k = f(k)$ או בצורה $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}=\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots\}$

דוגמאות

סדרה **חשבונית** – הפרש קבוע בין איבריה העוקבים

$$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\dots=a_{n+1}-a_n=d$$

איבר כללי של סדרה חשבונית

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$$

סכום של n איברים ראשונים של סדרה חשבונית

$$S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d\,]\cdot n}{2}$$

דוגמאות

1. $\{1,3,5,\dots,2k-1,\dots\}$ - סדרת המספרים אי הזוגיים
2. $\{4,\ -2,\ -8,\ -14,-20\}$ $a_1=4,\ d=-6,\ n=5$

$$a_5=4+4\cdot(-6)=-20,\ S_5=\frac{[2\cdot4+4\cdot(-6)]\cdot5}{2}=-40$$

סדרה **הנדסית** – מנה קבועה בין איבריה העוקבים

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\dots=\frac{a_{n+1}}{a_n}-=q$$

איבר כללי של סדרה הנדסית

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$$

סכום של n איברים ראשונים של סדרה הנדסית

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=\frac{a_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$$

סדרה הנדסית אינסופית יורדת $-1<q<1$

סכום של כל אינסוף איברי הסדרות שואף ל-

$$S=S_\infty=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots=\frac{a_1}{1-q}$$

דוגמאות

1. $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\dots\right\}$, $S_\infty=\frac{1}{1-0.5}=2$
2. $\{4,\ 4,\ 4,\ \dots\}$ סדרה קבוע – גם חשבונית וגם הנדסית

2. שיטת האינדוקציה המתמטית (מגדלי דומינו)

נתונה טענה T כללית המהווה סדרה של טענות

$$T = \{T(k)\}_{k=1}^{\infty} = \{T(1), T(2), \ldots, T(n), \ldots\}$$

הטענה T נחשבת נכונה(לכל n טבעי) אם ורק אם כל הטעות בסדרה נכונות ואם ורק אם מתקיימות 2 אקסיומות האינדוקציה

1. $T(1)$ נכונה , 2. $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ לכל n טבעי

דוגמאות - הוכח בשיטת האינדוקציה את הטענות הבאות

1. לכל n טבעי המספר $6^n - 1$ מתחלק ב-5 ללא שארית

הוכחה

$T(1): 6^1 - 1 = 5$ מתחלק ב-5 ללא שארית

נניח $T(n)$ נכונה כלומר המספר $6^n - 1$ מתחלק ב-5 ללא שארית

אזי $T(n+1)$ אומרת כי $6^{n+1} - 1$ מתחלק ב-5 ללא שארית – נוכיח זאת

$$6^{n+1} - 1 = 6 \cdot 6^n - 6 + 5 = 6 \cdot \left(6^n - 1\right) + 5$$

על סמך הנחת האינדוקציה $6^n - 1$ מתחלק ב-5 לכן גם $6 \cdot \left(6^n - 1\right)$ מתחלק ב-5 לכן גם $6 \cdot \left(6^n - 1\right) + 5$ מתחלק ב-5 לכן הטענה הכללית נכונה

2. לכל n טבעי המספר $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2}{4}(1+n)^2$

הוכחה - ...

3. אי שוויון הממוצעים - לכל n מספרים ממשיים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ חיוביים מתקיים

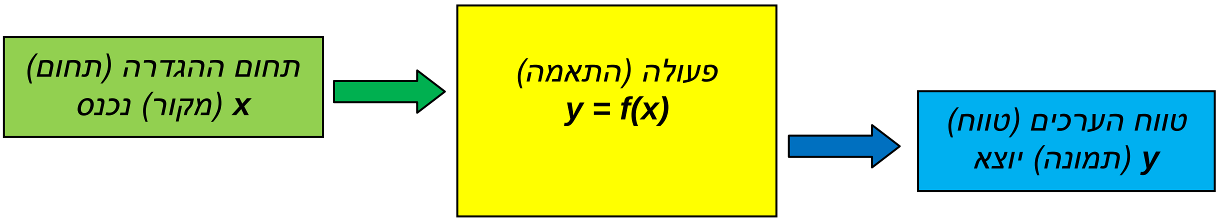
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \le (a_1 \cdots a_n)^{1/n} \le \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

(הממוצע החשבוני $\le$ הממוצע ההנדסי $\le$ <u>ממוצע ההרמוני</u>)

בשני המקרים לא מתקיים שוויון אלא אם כל המספרים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ שווים זה לזה

(הוכחה עבור $n = 2$ בלבד)

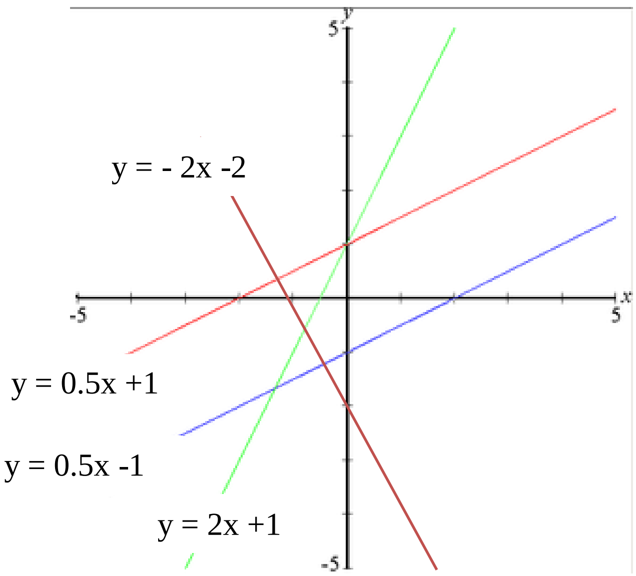
3. מושג של פונקציה ממשית (מופעלת על קבוצת המספרים הממשיים)



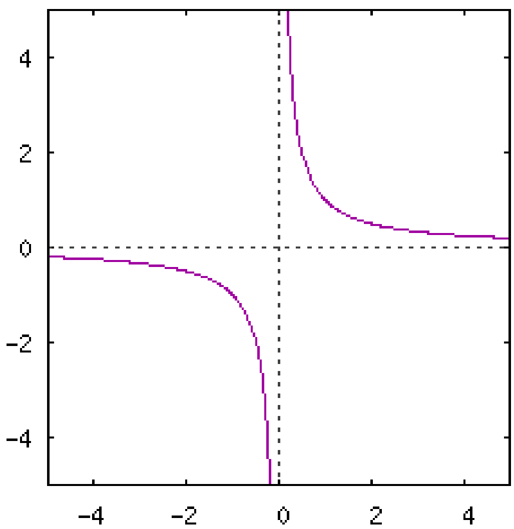
2 צורות הצגה עיקריות של פונקציה ממשית – נוסחה וסקיצה של גרף – דוגמאות

1. פונקציה ליניארית(קווית) $y = ax + b$

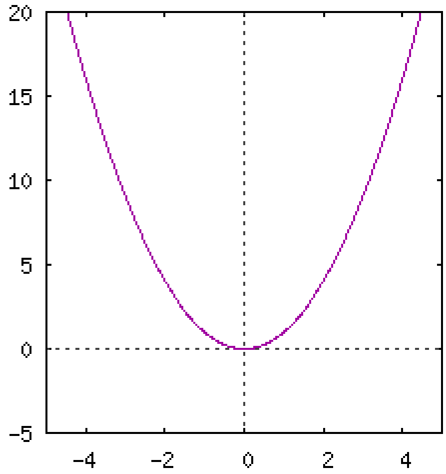
תחום $x \in \mathbf{R}$ טווח $y \in \mathbf{R}$ כאשר $a \neq 0$



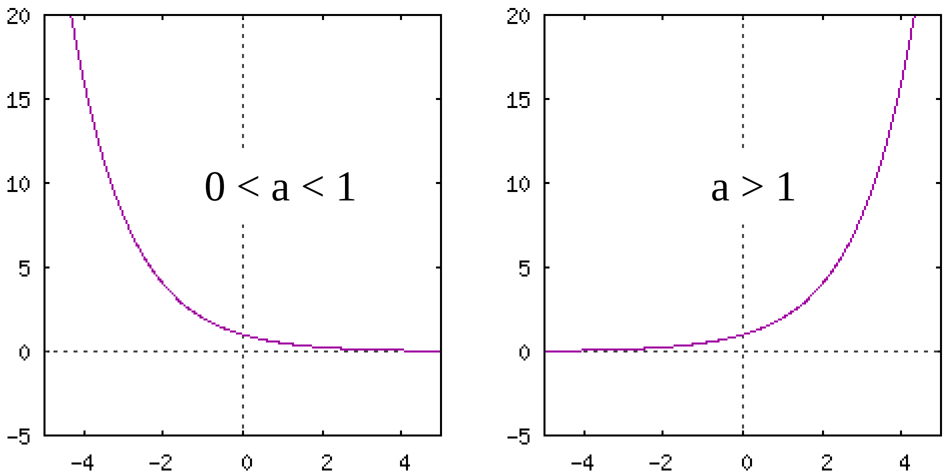
2. פונקציה $y = \frac{1}{x}$ תחום $x \neq 0$ טווח(תמונה) $y \neq 0$



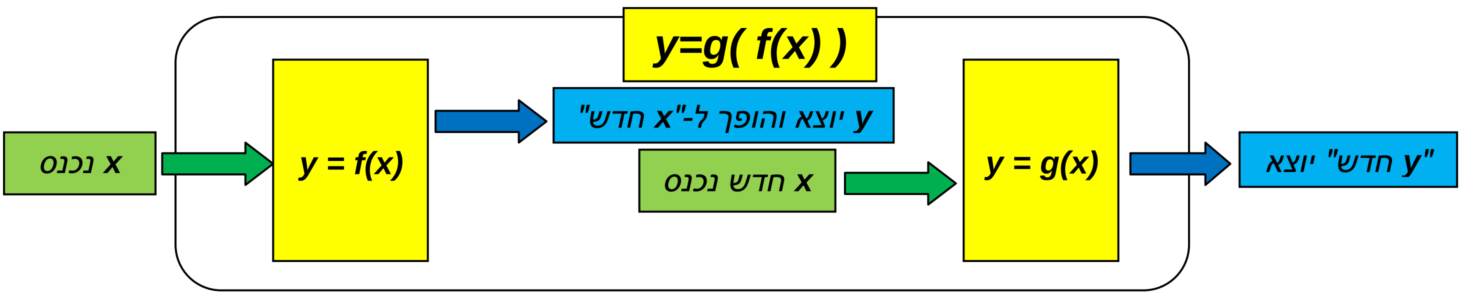
3. פונקציה ריבועית $y = x^2$ תחום $x \in \mathbf{R}$ טווח(תמונה) $y \geq 0$



4. פונקציה מעריכית $y=a^x$ תחום $x \in \mathbf{R}$ טווח(תמונה) $y>0$



פונקציה מורכבת



דוגמא

$$f(x)=5x-7,\ g(x)=x^3$$
$$g(f(x))=g(5x-7)=(5x-7)^3$$
$$f(g(x))=f(x^3)=5x^3-7$$

תרגילים: עבור כל אחת מזוג הפונקציות $f(x),g(x)$ הגדר את $f(g(x)),g(f(x))$

1. $f(x)=x+4,\ g(x)=x^3-2x^2-5x+6$, 2. $f(x)=\sqrt{x+4},\ g(x)=x^2+4$

3. $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt[3]{x^2}$, 4. $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$,

5. $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=x^2$, 6. $f(x)=-\sqrt{x},\ g(x)=x^2$,

7. $f(x)=|x|,\ g(x)=-x^2$, 8. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2},\ g(x)=\dfrac{2x+1}{2-x}$,

9. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1},\ g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, 10. $f(x)=x^2+2,\ g(x)=x^3-5x$,

תשובות

1. $g(f(x))=(x+4)^3-2(x+4)^2-5(x+4)+6$, $f(g(x))=x^3-2x^2-5x+10$

2. $g(f(x))=x+8$, $f(g(x))=\sqrt{x^2+8}$

3. $g(f(x))=\sqrt[3]{x}$, $f(g(x))=\sqrt[3]{x}$

4. $g(f(x))=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1}$, $f(g(x))=\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2+1}$

5. $g(f(x))=x$, $f(g(x))=|x|$

6. $g(f(x))=x$, $f(g(x))=-|x|$

7. $g(f(x))=-x^2$, $f(g(x))=x^2$

8. $g(f(x))=x$, $f(g(x))=x$

9. $g(f(x))=-x$, $f(g(x))=\dfrac{1}{x}$

10. $g(f(x))=(x^2+2)^3-5(x^2+2)$, $f(g(x))=(x^3-5x)^2+2$

פונקציה $f(x)$ נקראת פונקציה זוגית אם

(1 תחום הפונקציה סימטרי ביחס לנקודה $x=0$;

(2 לכל x בתחום מתקיים $f(-x)=f(x)$.

גרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר Y.

דוגמאות לפונקציות זוגיות

$$y=x^2, x\in\mathbf{R} \quad y=\frac{1}{x^2}, x\neq 0 \quad y=|x|, x\in\mathbf{R} \quad y=C, x\in\mathbf{R}$$

$$y=\cos x, x\in\mathbf{R} \quad y=\arccos x, -1\le x\le 1 \quad y=\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1$$

.2 פונקציה $f(x)$ נקראת פונקציה אי זוגית אם

(1 תחום הפונקציה סימטרי ביחס לנקודה $x=0$;

(2 לכל x בתחום מתקיים $f(-x)=-f(x)$.

גרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לראשית הצירים.

דוגמאות לפונקציות זוגיות

$$y=x, x\in\mathbf{R} \quad y=\frac{1}{x}, x\neq 0 \quad y=\sin x, x\in\mathbf{R} \quad y=\tan x, x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$y=\cot x, x\in\mathbf{R} \quad y=\arcsin x, -1\le x\le 1 \quad y=\arctan x, x\in\mathbf{R}$$

.3 פונקציה $f(x)$ היא <u>פונקציה כללית</u> (לא זוגית ולא אי-זוגית)

אם מתקיים לפחות אחד משני התנאים הבאים:

(1 תחום הפונקציה אינו סימטרי ביחס לנקודה $x=0$;

(2 קיימת נקודה x_1 בתחום המקיימת $f(-x_1)\neq f(x_1)$

ובנוסף קיימת נקודה x_2 מתחום המקיימת $f(-x_2)\neq -f(x_2)$.

דוגמאות לפונקציות כלליות

$$f(x)=x+x^2 \quad f(1)=2, f(-1)=0 \quad f(-1)\neq f(1), f(-1)\neq -f(1)$$

$$f(x)=\sqrt{-x^2+3x+4} \qquad -1\le x\le 4$$

תרגילים

(I הוכח כי הפונקציות הבאות זוגיות

1) $f(x)=e^{x^2+1},\ x\in\mathbf{R}$ 2) $f(x)=\ln\left(\frac{x^{10}}{x^4+x^2+1}\right),\ x\neq 0$ 3) $f(x)=2^{x\cdot\arctan x},\ x\in\mathbf{R}$

4) $f(x)=\sqrt{9-x^2},\ -3\le x\le 3$ 5) $f(x)=\frac{e^{|x|}\cdot\arcsin x}{\sqrt[3]{x}},\ -1\le x<0 \ \cup\ 0<x\le 1$

(II הוכח כי הפונקציות הבאות אי-זוגיות

6) $f(x)=\frac{\cos 4x}{x^3-4x},\ x\neq -2,\ x\neq 0,\ x\neq 2$ 7) $\arctan(\sin x), x\in\mathbf{R}$;

8) $f(x)=\left(\frac{x^5}{x^4+\cos x+1}\right)^3,\ x\in\mathbf{R}$ 9) $f(x)=\sqrt[5]{2x+\sin 3x+\arctan 4x},\ x\in\mathbf{R}$

$f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות זוגיות המוגדרות בכל התחום הממשי

האם הפונקציות הבאות זוגיות או אי-זוגיות ?

10) $h(x)=\frac{\sin x\cdot f(x)-\arctan x\cdot g(x)}{f(g(x))},\ \ f(g(x))\neq 0$ 11) $h(x)=\frac{f(\cos x)+g(\sin x)}{e^{f(x)}+\ln(|g(x)|+1)};$

12) $h(x)=\frac{\sqrt[3]{f(x)}\cdot[g(x)]^5}{(x^5+x)^3},\ \ x\neq 0$

$f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות אי-זוגיות המוגדרות בכל התחום הממשי. האם הפונקציות הבאות זוגיות או אי-זוגיות

13) $h(x)=g(x)\cdot[e^{f(x)}+e^{-f(x)}]$ 14) $h(x)=f(x)\cdot[e^{g(x)}-e^{-g(x)}];$

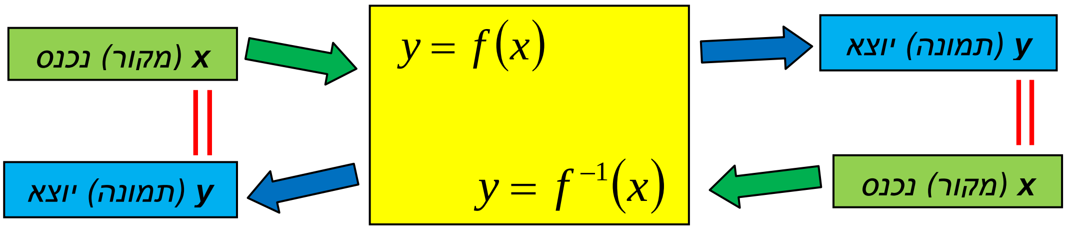
תשובות   זוגית 14)   אי-זוגית 10,11,12,13)

הוכח כי הפונקציות הבאות הן פונקציות כלליות

26) $f(x)=e^x,\ \ x\in\mathbf{R}$ 27) $f(x)=\ln x,\ \ x>0$ 28) $f(x)=3x-5,\ \ -1<x<1$

29) $f(x)=x^2-2x,\ \ x\neq 2,\ \ x\neq -2$ 30) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-25}},\ \ x<-5\ \cup\ x>5$

פונקציה הפיכה והפונקציה ההופכית שלה



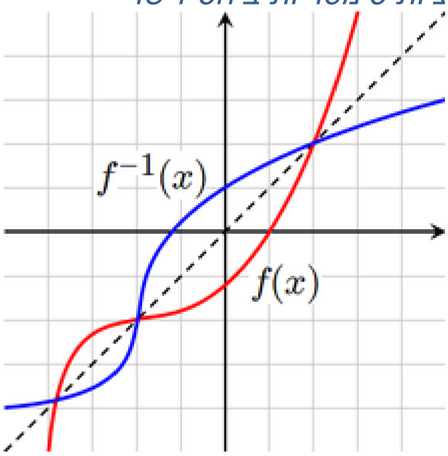
פונקציה $y=f(x)$ הפיכה – קיימת הפונקציה ההופכית שלה $y=f^{-1}(x)$

שפועלת בצורה הפוכה – בשתי הפונקציות מתחלפים

מקור **x** – תמונה **y**

תחום – טווח

סקיצות הגרפים של שתי הפונקציות סימטריות ביחס לישר



לכל **x** בתחומים של שתי הפונקציות מתקיים $f^{-1}(f(x))=x$ ו- $f(f^{-1}(x))=x$

(כל אחת "מתקנת" את פעולת משנית)

במידה ופונקציה אינה הפיכה בכל תחום הגדרתה – מצמצמים את התחום

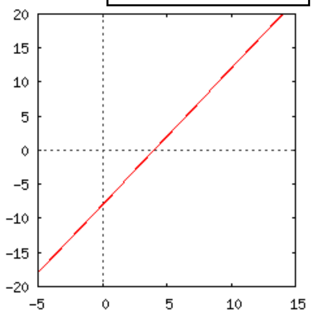
ל"תחום ההפיכות" – תת התחום המרבי בו הפונקציה תהיה הפיכה

דוגמאות

1.

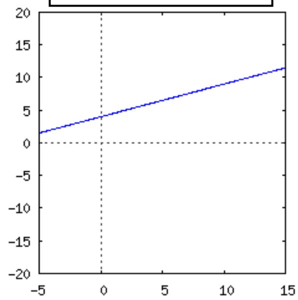
$$y = f(x) = 2x - 8 \Rightarrow x = f(y) = 2y - 8 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 4$$

$\boxed{f(x) = 2x - 8}$



תחום $x \in \mathbf{R}$ טווח $y \in \mathbf{R}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 4}$



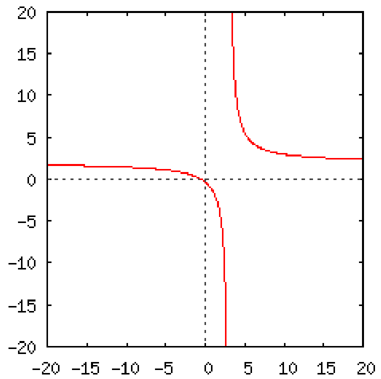
תחום $x \in \mathbf{R}$ טווח $y \in \mathbf{R}$

2.

$$y = f(x) = \frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow x = f(y) = \frac{2y+1}{y-3} \Rightarrow$$

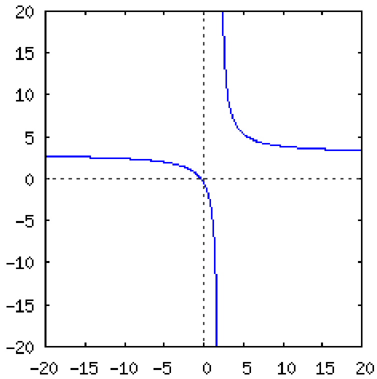
$$xy - 3x = 2y + 1 \Rightarrow (x-2)y = 3x + 1 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

$\boxed{f(x) = \frac{2x+1}{x-3}}$



תחום $x \neq 3$ טווח $y \neq 2$

$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}}$



תחום $x \neq 2$ טווח $y \neq 3$

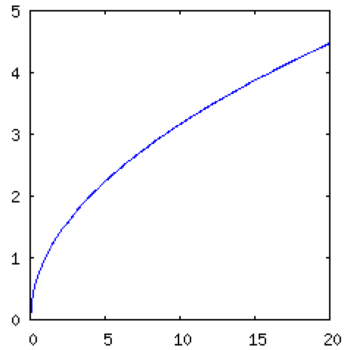
.3

$$y=f(x)=x^2\,(y\ge 0)\Rightarrow x=f(y)=y^2\,(x\ge 0)\Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$$

פונקציה בלתי הפיכה לכן נגביל את התחום על ידי $x\ge 0$

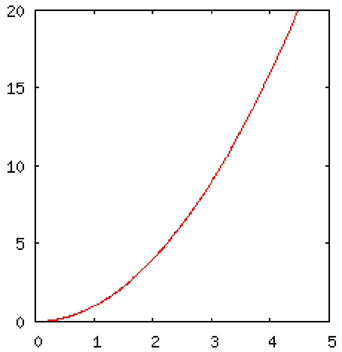
$$y=f(x)=x^2\,(x,y\ge 0)\Rightarrow x=f(y)=y^2\,(x,y\ge 0)\Rightarrow y=\sqrt{x}$$

$\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{x}}$



תחום $x\ge 0$ טווח $y\ge 0$

$\boxed{f(x)=x^2(x\ge 0)}$



תחום $x\ge 0$ טווח $y\ge 0$

.4

$$y=-x^2+2x+1\Rightarrow x=-y^2+2y+1\Rightarrow$$

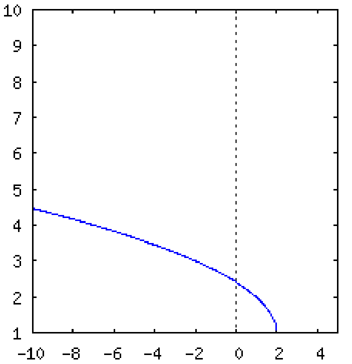
$$y^2-2y+1=-x+2\Rightarrow (y-1)^2=-x+2\Rightarrow y-1=\pm\sqrt{-x+2}$$

פונקציה בלתי הפיכה לכן נגביל את התחום על ידי $x\ge 1$

$$y=f(x)=-x^2+2x+1(x\ge 1)\Rightarrow\ldots$$

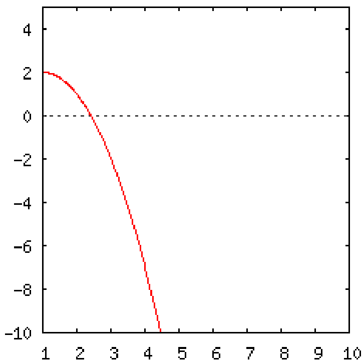
$$y-1=\sqrt{-x+2}\,(y\ge 1)\Rightarrow y=1+\sqrt{-x+2}$$

$\boxed{f(x)=1+\sqrt{-x+2}}$



תחום $x\ge 0$ טווח $y\ge 0$

$\boxed{f(x)=-x^2+2x+1}$



תחום $x\ge 0$ טווח $y\ge 0$

תרגילים: עבור כל אחת מהפונקציות $f(x)$ הבאות מצא את
א. תחום הגדרתן
ב. תחומי ההפיכות ואת הנוסחה $f^{-1}(x)$ לפונקציה ההופכית
ג. תחום ההגדרה לפונקציה ההופכית וטווח(תמונה) ל- 2 הפונקציות הנ"ל
ד. שרטט סקיצות לשתי הפונקציות – הנתונה ולהופכית שלה

1. $y = f(x) = x^2 + x + 1$, 2. $y = f(x) = -5x^2 + 10x - 3$

3. $y = f(x) = -x^2 + 6x - 9$, 4. $y = f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

5. $y = f(x) = \sqrt{x+3} + 1$, 6. $y = f(x) = \sqrt{3-x} - 2$

תשובות

1. תחום מרבי $x \ge 0.5$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 0.75} - 0.5$, תחום של $f^{-1}(x)$ הוא $\mathbf{x \ge 0.75}$
2. תחום מרבי $x \ge 1$, $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2-x}{5}} + 1$, תחום של $f^{-1}(x)$ הוא $x \le 2$
3. תחום מרבי $x \ge 3$, $f^{-1}(x) = \sqrt{-x} + 3$, תחום של $f^{-1}(x)$ הוא $x \le 0$
4. תחום מרבי $x \ne -2$, $x = f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{1-x}$, תחום של $f^{-1}(x)$ הוא $x \ne 1$
5. תחום מרבי $x \ge -3$, $f^{-1}(x) = x^2 - 2x - 2$, תחום של $f^{-1}(x)$ הוא $x \ge 1$
6. תחום מרבי $x \le 3$, $f^{-1}(x) = -x^2 - 4x - 1$, תחום של $f^{-1}(x)$ הוא $x \ge -2$