OT1OT1

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב -- המחלקה למתמטיקה
חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) -- סמסטר א' תשע"ד
תרגיל 9

תשובות

1. f גזירה בקטע ומתקיים: $f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

נגדיר
$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$$
בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$. g גזירה בקטע זה ו-
$$g'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x)$$
לכל $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ מתקיים $x > 0$ וגם $\sin(x) > 0$ ולכן $g'(x) < 0$. ממשפט נסיק כי g מונוטונית יורדת ממש בקטע $[0, \frac{\pi}{2})$.

$g(0) = 0$ ולכן לכל $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ מתקיים $g(x) < g(0) = 0$.

כעת, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ לכל $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ו - $0 < x^2$, ולכן $f'(x) < 0$ בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$. ממשפט נובע ש f היא מונוטנית יורדת ממש בקטע זה.

2. נוכיח תחילה ש f חסומה בקטע:

עבור $0 < x < \frac{x}{2}$ מתקיים $x < \tan(x)$ (וודאו זאת!). $\arctan(x)$ היא פונקציה עולה ולכן כאשר $0 < x < \tan(x)$ מתקיים:
$$\arctan(0) < \arctan(x) < \arctan(\tan(x))$$

כלומר: $0 < \arctan(x) < x$ עבור $0 < x < \frac{\pi}{2}$. לכן $0 < \frac{\arctan(x)}{x} < 1$ לכל $0 < x < \frac{x}{2}$.

עבור $x \geq \frac{\pi}{2}$ מתקיים: $0 < \frac{\arctan(x)}{x} < \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 1$

לסיכום: קיבלנו ש - $0 < \frac{\arctan(x)}{x} < 1$ לכל x בקטע $(0, \infty)$.

הפונקציה אינה מקבלת מקסימום בקטע $(0, \infty)$. נראה זאת. נניח בשלילה כי f מקבלת מקסימום בקטע. כלומר, נניח בשלילה שקיים $x_0 \in (0, \infty)$ כך שלכל $x \in (0, \infty)$ מתקיים $f(x) \leq f(x_0)$.

ראינו כי $f(x) < 1$ לכל $x \in (0, \infty)$ לכן בפרט $f(x_0) < 1$.
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{arctan(x)}{x} = 1$$

(הוכיחו זאת!)

כעת נסמן $\varepsilon = 1 - f(x_0)$. אז בפרט $\varepsilon > 0$ ומההגדרה הפורמלית של גבול חד צדדי קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < x < \delta$ מתקיים $|f(x) - 1| < \varepsilon = 1 - f(x_0)$.

לכן לכל $0 < x < \delta$ מתקיים
$$f(x_0) - 1 < f(x) - 1$$
כלומר $f(x_0) < f(x)$ בסתירה לבחירת x_0. קיבלנו סתירה ולכן לפונקציה אין מקסימום בקטע.

3. (א) $Im(f) = (-\infty, +\infty)$.

4.

(א) $\frac{8}{5},\ \frac{1}{31}$

(ב) $1,\ \frac{1}{2}$

(ג) $\frac{e^{\frac{11\pi}{4}}\sqrt{2}}{2},\ -\frac{e^{\frac{7\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$

(ד) $-\frac{1}{4},\ -2$

5. נקודות מינימום מקומי: $\{x \in (0,\infty) \mid x \notin \mathbb{Q}\}$
נקודות מקסימום מקומי: $\{x \in (-\infty,0) \mid x \notin \mathbb{Q}\}$
f כן גזירה בראשית (בלבד!) ובנוסף $f'(0)=0$.

6. המלבן המבוקש הוא ריבוע, ואורך צלעותיו 10 מ'.

7. $R\sqrt{2}/2$, $R\sqrt{2}$.

8.

(א) 0

(ב) 1

(ג) $-\frac{8}{27}$

(ד) $\frac{1}{2}$

(ה) 0

(ו) $e^{-\frac{1}{2}}$

(ז) e^{-2}

(ח) $+\infty$

(ט) 1

9. אם משתמשים בפולינום מקלורין של $\sin x$: $\frac{\pi}{5}-\frac{\pi^3}{750}+\frac{\pi^5}{375{,}000}$.

10. פולינום מקלורין של e^x מסדר 5 מספיק: $\frac{6331}{3840}$

11. (א) $\frac{1}{20}$

(ב) נשים לב בי $\cos^{(3)} x = \sin x$. נובע מנוסחת טיילור כי קיים ξ בין 0 ל- $u \neq 0$ כך ש-

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{\sin\xi}{3!}u^3$$

לכן כאשר $x \neq 0$, ו- $u = x^5$ אנו מקבלים שקיים ξ בין 0 ל- x^5 שמקיים

$$\cos x^5 = 1 - \frac{x^{10}}{2!} + \frac{\sin\xi}{3!}x^{15} \tag{1}$$

באופן דומה, $\sin^{(4)} x = \sin x$ ונובע מנוסחת טיילור כי קיים θ בין 0 ל- u כך ש-

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{\sin\theta}{4!}u^4$$

לכן כאשר $x \neq 0$, ו- $u = x^3$ אנו מקבלים שקיים θ בין 0 ל- x^3 שמקיים

$$x\sin x^3 = x\left(x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{\sin\theta}{4!}x^{12}\right) = x^4 - \frac{x^{10}}{3!} + \frac{\sin\theta}{4!}x^{13} \tag{2}$$

אזי בעזרת (1) ו- (2) אנו מקבלים כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^5)}{x^4 - x\sin(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^{10}}{2!}+\frac{\sin\xi}{3!}x^{15}\right)}{x^4-\left(x^4-\frac{x^{10}}{3!}+\frac{(\sin\theta)}{4!}x^{13}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{10}}{2!}-\frac{\sin\xi}{3!}x^{15}}{\frac{x^{10}}{3!}-\frac{\sin\theta}{4!}x^{13}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2!}-\frac{\sin\xi}{3!}x^5}{\frac{1}{3!}-\frac{\sin\theta}{4!}x^3} = \frac{\frac{1}{2!}}{\frac{1}{3!}} = 3$$

מכיוון ש- ξ נמצא בין 0 ל- x^5 ו- θ נמצא בין 0 ל- x^3, אנו מקבלים כי $\xi \to 0$ וגם $\theta \to 0$ כאשר $x \to 0$. לכן $\lim_{x\to 0}\sin\theta = \lim_{x\to 0}\sin\xi = 0$ (מרציפות של $\sin u$).