

חדו"א להנדסת מכונות 1 - (201-1-9711)  
 סמסטר א' תשע"ד  
 תרגיל 8 - פתרונות

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה

1. האם הפונקציות הבאות גזירות ב5? הוכיחו.

(א) לא- הנגזרת משמאל היא 0 ומימין היא 1.

(ב) לא- הפונקציה לא רציפה ב5.

(ג) כן. הנגזרת משני מצדדים שווה ל 75.

2. לכל הפונקציות הבאות, מצאו

(א)  $f'(x)$

(ב) באיזה נקודות  $f(x)$  גזירה?

i.  $\mathbb{R} ; \frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}$

ii.  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\} ; \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2(1-x^3)^4}}$

iii.  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\} ; \frac{1+\cos^2(x)}{-2\sin^3(x)}$

iv.  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} ; \frac{-1}{1+x^2}$

v.  $0 < x < 1 ; \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

vi.  $\{x \in \mathbb{R} : x > 0, x \neq e^{\frac{n\pi}{2}}, n \in \mathbb{Z}\} ; 5^{\tan(\ln(x))} \cdot \ln(5) \cdot \frac{1}{x \cos^2(\ln(x))}$

vii.  $x > e ; \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$

viii.  $\mathbb{R} ; \frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{2(1+e^x)}$

ix.  $\mathbb{R} ; \frac{3\sin^2(x) \cos(x)(1+2x^2) - \ln(2) \sin^3(x)(2x^2)(2x)}{(1+2x^2)^2}$

x.  $\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ או } x > 1\} ; 4^{\arctan(\sqrt{x^2-1})} \cdot \ln(4) \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$.3 \quad f'_+(0) = 0, f'_-(0) = 1$$

הפונקציה אינה גזירה ב-0 כי הנגזרות חד-צדדיות אינן שוות.

$$.4 \quad \alpha > 1$$

.5 • אם קיימים נקודות  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$  כך ש  $f(a) = f(b)$ , אז לפי משפט רול, קיים נקודה בין  $a$  ל  $b$  כך שהנגזרת שם שווה ל-0. אך אין לנגזרת  $f'(x) = 25x^4 + 3$  שורשים ב  $\mathbb{R}$ .

$$. \bullet \quad g'(10) = \frac{1}{f'(g(10))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{28}$$

.6 נחלק את הטבעיים לזוגיים ואי זוגיים. קודם כל, שים לב ש  $f(x) = 0$  אם  $n$  זוגי יש שני מקרים: או ש  $\phi(x) > 0$  או ש  $\phi(x) < 0$ .

אם  $\phi(x) > 0$  אז קיים סביבה של  $x_0$  כך שלכל  $x$  בסביבה,  $f(x) > 0$  ואז  $f$  מינימום מקומי.

אם  $\phi(x) < 0$  אז קיים סביבה של  $x_0$  כך שלכל  $x$  בסביבה,  $f(x) < 0$  ואז  $f$  מקסימום מקומי.

אם  $n$  אי זוגי, הוא לא נקודת קיצון מקומי כי לנקודות קטנים מ  $x_0$  בסביבה  $f$  תקבל ערכים שליליים ונקודות גדולים מ  $x_0$  בסביבה  $f$  תקבל ערכים חיוביים.

$$.7 \quad \text{התחום של } f \text{ הוא } \mathbb{R} \text{ והתחום של } g \text{ הוא } x \text{ כך ש } ax - x^2 > 0$$

מה שחשוב זה שאם  $b$  שייך לתחום, אז גם יש סביבה של  $b$  מוכל בתחום. שתי הפונקציות גזירות בתחום הגדרה שלהם, אז לפי משפט פרמה, הנגזרות חייבות להיות אפס בנקודת קיצון מקומי.

$$\Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 3ax^2 - 24x = 0$$

$$x = 0$$

או

$$ax = 8$$

(לא רוצים לקפוץ ולחלק ב- $a$  כי אנו עדיין לא יודעים אם היא 0 או לא.)

באופן דומה,

$$g'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2x - a}{2\sqrt{(ax - x^2)^3}} = 0 \Rightarrow$$

$$a = 2x$$

וגם

$$x \neq 0$$

אז אנחנו יודעים ש  $ax = 8$  וגם  $a = 2x$  אז  $2x^2 = 8$

$$\text{אז } x = 2 \text{ ו } a = 4$$

$$\text{או } x = -2 \text{ ו } a = -4$$

אך, אם

$$a = -4$$

אז

$$\frac{1}{2} = g(-2) \neq f(-2) = \frac{-1}{2}$$

$$\text{אבל אם } a = 4$$

$$\frac{1}{2} = g(2) = f(2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{אז } x = 2 \text{ ו } a = 4$$