# אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
# חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) - סמסטר א' תשע"ד
# פתרון תרגיל 3

1. מיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

(א) ראשית נשים לב שהפונקציה מוגדרת ב־ $[-2,\infty)$.
יהי $x \neq \pm 2$. בתחום ההגדרה. אז
$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}.$$
לכן קיים הגבול של $f$ ב־2, אך אינו שווה ל־ $f(2)$, ולכן 2 היא נקודת אי רציפות סליקה.
לעומת זאת, הגבולות החד־צדדי הימני של $f$ ב־ $(-2)$ אינו סופי ולכן זו נקודת אי רציפות ממין שני

הערה: אנו מתייחסים רק לגבול החד־צדדי הימני כי הפונקציה מוגדרת רק בסביבה ימנית של $(-2)$.

בכל נקודה $x \neq \pm 2$ בתחום ההגדרה הפונקציה כמובן רציפה, כפונקציה אלמנטרית המוגדרת בנקודה.

(ב) יהי $x \neq \pm 1, 0$ אזי
$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}$$
לכן קיים הגבול $lim_{x\to 1}f(x)=0=f(1)$ ולכן הפונקציה רציפה ב־1.
בנוסף, קיים הגבול $lim_{x\to 0}f(x)=-1\neq f(0)$ ולכן לפונקציה יש נקודת אי רציפות סליקה ב־0.
לבסוף, הגבולות החד־צדדיים ב־ $(-1)$ אינם סופיים ולכן זו נקודת אי רציפות ממין שני.
בכל נקודה אחרת הפונקציה כמובן רציפה, כפונקציה אלמנטרית המוגדרת בנקודה.

(ג)
$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$
בנקודה 0 יש לפונקציה נקודת אי רציפות ממין שני, שכן הגבול החד צדדי הימני אינו סופי.
בכל נקודה $x \neq 0$ הפונקציה כמובן רציפה , כפונקציה אלמנטרית המוגדרת בנקודה.

(ד)
$$f(x)=\begin{cases} \lfloor\frac{1}{x}\rfloor & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$
הקבוצה $\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$ היא קבוצת נקודות אי הרציפות ממין ראשון, שכן לכל $\frac{1}{n}<x\leq\frac{1}{n-1}$ מתקיים $n-1\leq\frac{1}{x}<n$. ולכן $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor=n-1$ מכאן נובע שהגבולות החד צדדיים של $f$ ב־ $\frac{1}{n}$ קיימים וסופיים אך שונים זה מזה: מימין $n-1$ ומשמאל $n$.
הנקודה 0 היא נקודת אי־רציפות ממין שני, כי הגבול החד־צדדי הימני אינו סופי.
בכל נקודה $x$ אחרת הפונקציה רציפה, שכן היא קבועה בסביבה קטנה של $x$ .

2. בכל אחד מהסעיפים הבאים, חשבו את הערך $a$ שעבורו הפונקציה הנתונה תהיה רציפה בכל תחום הגדרתה

(א)
$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<3\\ 2ax & x\geq 3\end{cases}$$
כדי שהגבול החד־צדדי הימני ב־3 יהיה שווה לגבול החד צדדי השמאלי שם, צריך להתקיים $a=\frac{4}{3}$.
בכל נקודה אחרת הפונקציה רציפה בכל מקרה.

(ב)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x-2} & x\neq 2\\ a & x=2\end{cases}$$

יהי $x\neq 2$. אזי $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4$ ולכן $\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}x^2+2x+4=12$.
לכן, עבור $a=12$ הפונקציה תהיה רציפה.

(ג)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2} & x>0\\ x+a & x\leq 0\end{cases}$$

יהי $x>0$. אזי $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{4\cdot(\frac{x}{2})^2}$ ולכן קיים הגבול החד־צדדי הימני של $f$ ב־0 והוא $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{4\cdot(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}$.
מצד שני, הגבול החד צדדי השמאלי של $f$ ב־0 הוא כמובן $a$, ולכן כדי שהפונקציה תהיה רציפה נגדיר $a=\frac{1}{2}$.

(ד)

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & x>a\\ e & x\leq a\end{cases}$$

הגבול החד צדדי הימני ב־$a$ הוא $e^{\frac{1}{a}}$ ואילו הגבול החד צדדי השמאלי שם הוא $e$. כדי שהפונקציה תהיה רציפה ב־$a$ צריך להתקיים $e^{\frac{1}{a}}=e$, כלומר $a=1$. נשים לב שהיות ש $a>0$ הפונקציה מוגדרת לכל $x$.

3. הראו כי לפונקציה $f(x)=2^x+2x-3$ יש שורש בקטע $[0,1]$, ומצאו אותו עד כדי קירוב של $0.1$.

קל לראות ש־ $f(0)<0<f(1)$, ולכן ע"פ משפט ערך הביניים יש לפונקציה שורש בקטע. נמצא אותו בקירוב הדרוש בעזרת שיטת החצייה.

שלב א: נסתכל על $\frac{1}{2}$: מתקיים $f(\frac{1}{2})<0<f(1)$ ולכן השורש $c$ נמצא בקטע $[\frac{1}{2},1]$.

שלב ב: נסתכל על $\frac{3}{4}$: מתקיים $f(\frac{1}{2})<0<f(\frac{3}{4})$ ולכן השורש $c$ נמצא בקטע $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$.

שלב ג: נסתכל על $\frac{5}{8}$: מתקיים $f(\frac{5}{8})<0<f(\frac{3}{4})$ ולכן השורש $c$ נמצא בקטע $[\frac{5}{8},\frac{3}{4}]$.

שלב ד': נסתכל על $\frac{11}{16}$. ערך זה נמצא במרחק הקטן מ־ $0.1$ מקצות הקטע. לכן הוא קירוב מספיק טוב לשורש של הפונקציה הנתונה.

הערה: בשאלה זו השימוש במחשבון כמובן מותר. שאלה שדורשת שימוש במחשבון אינה לבוחן.

4. הראו כי למשוואה $x^3-15x+1=0$ יש שלושה פתרונות בקטע $[-4,4]$.

נסמן $p(x)=x^3-15x+1$. נשים לב כי $p(-4)<0, p(-2)>0, p(2)<0, p(4)>0$. לכן, ע"פ משפט ערך הביניים, יש לפולינום שורש בכל אחד מהקטעים הבאים: $[-4,-2],[-2,2],[2,4]$.

5. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

(א) אם המכפלה $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ רציפה ב־0, אז כל אחת מהפונקציות $f(x),g(x)$ רציפה ב־0.
לא נכון. למשל, נגדיר:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

פונקציות אלו אינן רציפות ב־0, אך מכפלתן רציפה ב־0 כי זו פונקציה השווה זהותית לאפס.

(ב) אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ואינה מתאפסת באף נקודה בקטע, אזי היא בעלת סימן קבוע בקטע זה.

נכון. נניח בשלילה שהפונקציה אינה בעלת סימן קבוע בקטע. אז יש $c,d\in[a,b]$ כך ש $f(c)<0<f(d)$. ואז, ע"פ משפט ערך הביניים, יש נקודה בין $c$ ל־$d$ שבה הפונקציה מתאפסת. וזה בסתירה להנחה.

(ג) אם הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b]$ ומתקיים $f(a)\cdot f(b)<0$, אזי יש נקודה בקטע שבה $f$ מתאפסת.

לא נכון. למשל נגדיר פונקציה $f$ על הקטע $[-1,1]$ ע"י $f(x)=\begin{cases} -1 & -1\le x<0 \\ 1 & 0\le x\le 1\end{cases}$

הפונקציה מחליפה סימן בקטע, אך אין אף נקודה בקטע שבה ערך הפונקציה שווה 0. הסיבה לכך היא כמובן שהפונקציה שהגדרנו אינה רציפה - אין בנתוני השאלה דרישה לרציפות.

(ד) אם הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b]$ אזי $f$ חסומה בקטע.

לא נכון. למשל נגדיר פונקציה $f$ על הקטע $[-1,1]$ ע"י $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0\end{cases}$ הפונקציה אינה חסומה מלעיל בקטע.

(ה) אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אזי תמונת $f$ היא קטע סגור.

נכון. ע"פ משפט ווירשטרס השני, פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת בו את המקסימום שלה $M$ ואת המינימום שלה $m$. ע"פ משפט ערך הביניים $f$ מקבלת בקטע כל ערך בין $m$ ו-$M$. לכן, תמונת $f$ חייבת להיות הקטע הסגור $[m,M]$.

6. הוכיחו את המשפט הבא:

**משפט נקודת השבת:** תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה רציפה. אזי יש נקודה $0\le c\le 1$ כך ש-$f(c)=c$.

נגדיר פונקציה $g(x)=f(x)-x$ על הקטע $[0,1]$. פונקציה זו כמובן רציפה. אם במקרה $g(0)=0$ או $g(1)=0$ אז סיימנו, כי אז נובע בהתאמה ש $f(0)=0$ או $f(1)=1$ ולכן מצאנו נקודת שבת. אחרת מתקיים $g(0)=f(0)-0=f(0)>0, g(1)=f(1)-1<0$, כי תמונת $f$ מוכלת ב-$[0,1]$, ולכן לכל $x$ בקטע, $0\le f(x)\le 1$. ע"פ משפט ערך הביניים, יש $c\in[0,1]$ כך ש $g(c)=0$ ואז $f(c)=c$ כנדרש.

7. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות בנקודות הנתונות תוך שימוש בהגדרת הנגזרת:

(א) $f(x)=x^3+3x^2-7x+1$ בנקודה $a=2$.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3+3(2+h)^2-7(2+h)+1-(2^3+3\cdot 2^2-7\cdot 2+1)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}(17+9h+h^2)=17.$$

(ב) $f(x)=\cos x$ בנקודה $a=\pi$.

$$f'(\pi)=\lim_{h\to\pi}\frac{\cos(\pi+h)-\cos(\pi)}{h}=\lim_{h\to\pi}\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2})sin(\frac{h}{2})}{h}=$$
$$=-\lim_{h\to\pi}sin(x+\frac{h}{2})\cdot\lim_{h\to\pi}\frac{sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}=-sin(\pi)\cdot 1=0.$$

8. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\sqrt{|x|}$ רציפה ב-0 אך לא גזירה שם.

הפונקציה רציפה ב-0 כי הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים שניהם ל-0.

אולם, $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty$, ולכן הפונקציה לא גזירה ב-0.