אוניברסיטת בן־גוריון בנגב – המחלקה למתמטיקה
חדו"א להנדסת מכונות 1 (201–1–9711) – סמסטר א' תשע"ד
תרגיל 6 – פתרונות

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)-\sin(2x)}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=5-2=3$$

(ב) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t+\frac{\pi}{2})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(-t)}{t}=-1$$

(ג) נסמן $t=\frac{\pi}{2}x$ אזי $t\to\frac{\pi}{2}$ כאשר $x\to 1$. לכן

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan(\frac{\pi x}{2})=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\cdot(\frac{\pi}{2}-t)\cdot\tan(\frac{\pi}{2}-t)=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(\frac{\pi}{2}-t)}{\cos(t)}\cdot\sin(t)=\frac{2}{\pi}.$$

(ד) $$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}=2$$

(ה) $$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=e$$

(ו) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+2x}-1}{3x^2+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+2x}-1}{x^2+2x}\cdot\frac{x^2+2x}{3x^2+5x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{3x^2+5x}=\ldots=\frac{2}{5}$$

(ז) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3x+2)-\ln(2)}{x}=\frac{3}{2}$$

(ח) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{2x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{2x^2+x^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2+x^3}=\ldots=\frac{1}{2}$$

(ט) $\lim_{x\to 0+}\sqrt[x]{1-x}=\lim_{x\to 0+}(1-x)^{1/x}=\lim_{t\to\infty}(1-\frac{1}{t})^t=e^{-1}$, וגם

$\lim_{x\to 0-}\sqrt[x]{1-x}=\lim_{x\to 0-}(1-x)^{1/x}=\lim_{t\to-\infty}(1-\frac{1}{t})^t=e^{-1}$, לכן הגבול שווה ל־ e^{-1}.

(י) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x^2+x+2}\right)^{2x^2+5}=e^{12}$$

(יא)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{x}{2x^2+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left[\left(1-\frac{x}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{x}}\right]^{\frac{x}{2x^2+1}\frac{x^2}{1-x}}\right)$$

המשך החישוב מראה ש־

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left[\left(1-\frac{x}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{x}}\right]^{\frac{x}{2x^2+1}\frac{x^2}{1-x}}\right)=\cdots=(e^{-1})^{-\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$$

2. תהי
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 5x}{x} & x>0\\ \frac{x+3}{2x+a} & x<0\end{cases}$$
עבור אילו ערכים של a לפונקציה f יש גבול בנקודה $x=0$?

פתרון: $\lim_{x\to 0+}f(x)=5$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=\frac{3}{a}$. לכן הגבול קיים אם ורק אם $\frac{5}{a}=5$ כלומר $a=\frac{3}{5}$.

3. תהי
$$f(x)=\begin{cases}\left(1+ax^2\right)^{\frac{2}{x^2}} & x\neq 0\\ e^{a^2+1} & x=0\end{cases}$$
עבור אילו ערכים של a הפונקציה f רציפה בנקודה $x=0$?

פתרון: $\lim_{x\to 0}f(x)=e^{2a}$, $f(0)=e^{a^2+1}$ לכן הפונקציה רציפה אם ורק אם $a^2+1=2a$, כלומר $a=1$.

4. תהי $f(x)=2\sin(\pi x)-1$. הוכיחו שקיים $x_0\in[0,\frac{1}{2}]$ כך ש־ $f(x_0)=x_0$.

פתרון: נגדיר:
$$g(x)=f(x)-x$$
g רציפה בקטע $[0,\frac{1}{2}]$. $g(0)=-1$, $g(\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, לכן על פי משפט ערך הביניים קיים x_0 בקטע $[0,\frac{1}{2}]$ כך ש $g(x_0)=0$, כלומר $f(x_0)=x_0$.

5. הוכיחו כי קיים לפחות פתרון ממשי אחד למשוואה $e^x-5x^4=0$.

פתרון: נגדיר $f(x)=e^x-5x^4$. מתקיים $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. לכן קיימים $A<0$, $B>0$ כך ש־ $f(A)<0$, $f(B)>0$. משום ש־ f רציפה, על פי משפט ערך הביניים קיים $c\in[A,B]$ כך ש $f(c)=0$.

6. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בנקודה a, ונניח כי $f(a)>0$. הוכיחו שקיים $\epsilon>0$ כך ש־ f חיובית בקטע $(a-\epsilon,a+\epsilon)$.

פתרון: נגדיר: $\delta=\frac{f(a)}{2}$. מכיוון ש $f(a)>0$, נשים לב ש־$\delta>0$.

לכן משום ש־ f רציפה בנקודה $x=a$, מהגדרת הגבול קיים $\epsilon>0$ כך שלכל x כך ש־ $|x-a|<\epsilon$ מקיים $|f(x)-f(a)|<\delta=\frac{f(a)}{2}$. מכאן שלכל x $(a-\epsilon,a+\epsilon)$ מתקיים $f(x)>\frac{f(a)}{2}>0$ כנדרש.

7. נניח ש־ $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$. הוכיחו על פי ההגדרה ש - $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$:

פתרון: יהי $\epsilon>0$ כלשהו. צריך להראות שקיים $\delta>0$ כך שלכל x כך ש - $0<|x-a|<\delta$ מתקיים ש־ $|\frac{1}{f(x)}|<\epsilon$.

מנתון ש - $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, קיים $\delta>0$ כך שלכל x כך ש - $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $f(x)>\frac{1}{\epsilon}>0$. לכן לכל x כנל $0<\frac{1}{f(x)}<\epsilon$ כלומר $|\frac{1}{f(x)}|<\epsilon$ כנדרש.