אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) - סמסטר א' תשע"ד
תרגיל 5 ־ תשובות

1. (א) יהי $\varepsilon > 0$. אנו רוצים למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $\delta > |x-(-1)| > 0$, כלומר $0 < |x+1| < \delta$, מתקיים כי $|(3x^2+7)-10| < \varepsilon$.
נתבוננן ב־

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{9}\right\} \tag{1}$$

נובע מאי־שיוויון המשולש שלכל $0 < |x+1| < \delta$ מתקיים כי

$$|x-1| = |x+1-2| \le |x+1| + |-2| < \delta + 2 \underset{(1)}{\le} 3. \tag{2}$$

אזי אנו מקבלים שלכל

$$0 < |x+1| < \delta \tag{3}$$

מתקיים כי

$$|(3x^2+7)-10| = |3x^2-3| = 3\cdot|x-1|\cdot|x+1| \underset{(2),(3)}{<} 3\cdot 3\cdot\delta = 9\cdot\delta \underset{(1)}{\le} 9\cdot\frac{\varepsilon}{9} = \varepsilon$$

(ב) יהי $\varepsilon > 0$. אנו רוצים למצוא $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > M$ מתקיים כי $|\frac{\sin x}{x} - 0| < \varepsilon$.
נתבונן ב־ $M = \frac{1}{\varepsilon}$. לכל $x > \frac{1}{\varepsilon}$ מתקיים כי

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

2. נגדיר $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$. נשתמש בהגדרה (או משפט) של גבול של פונקציה באמצעות סדרות: $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה (a_n) המקיימת $a_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ו־ $a_n \to 0$, מתקיים כי $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = L$. תהי $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n\pi}}$. נשים לב כי לכל n, $a_n \neq 0$ וגם $a_n \to 0$. בנוסף

$$f(a_n) = \cos\left(\frac{1}{a_n^3}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

הסדרה $f(a_n)$ אינה מתכנסת, אזי הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ אינו קיים.

3. (א) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}\cdot 10^{-10}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}\cdot 10^{-10}$

(ב) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$

(ג) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$

(ד) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

4. (א) $\frac{12}{7}$

(ב) 0

(ג) $\frac{1}{4}$

(ד)

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25} = \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x-1}+2)} =$$

עבור $x \neq 5$

$$= \frac{1}{(x+5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

לכן

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{(x+5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{1}{40}$$

(ה) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(ו) $-\frac{1}{36}$

5. מהנתון ש־ $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$, לכל $\varepsilon < 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־ שלכל x המקיים $0 < |x-1| < \delta$ מתקיים $|f(x)-3| < \varepsilon$. בפרט עבור $\varepsilon = 1$ קיים δ כזה, והוא יקיים את הנדרש.

6. יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו. מכך ש־ $\lim_{x\to a} f(x) = A$ נובע שקיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta_2$ מתקיים $|f(x)-A| < \varepsilon$. מכך ש־ $\lim_{x\to a} f(x) = A$ נובע שקיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta_2$ מתקיים $|g(x)-B| < \varepsilon$.

נבחר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ אזי שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ נקבל ש־

$$A - \varepsilon \leq f(x)$$

וגם

$$A - \varepsilon \leq B - \varepsilon \leq g(x)$$

ולכן

$$A - \varepsilon \leq h(x). \tag{4}$$

כמו כן:

$$h(x) \leq f(x) \leq A + \varepsilon$$

ולכן

$$h(x) \leq A + \varepsilon. \tag{5}$$

בסך הכל קיבלנו $|h(x)-A| \leq \varepsilon$ עבור x המקיים $0 < |x-a| < \delta$.