תשובות לתרגיל 4
חדו"א להנדסת מכונות 1
סמסטר א' תשע"ד

1. הסדרה אינה מתכנסת ־ יש לה שתי תתי סדרות שמתכנסות לגבולות שונים. הסתכלו על איברי הסדרה במקומות הזוגיים ואיברי הסדרה במקומות האי־זוגיים.

2. לכל $n \in \mathbb{N}$, $2-(-1)^n \geq 2-1=1$, ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$a_n = \frac{2-(-1)^n}{2n^2+1} \cdot (n^3+n) \geq \frac{n^3+n}{2n^2+1} \geq \frac{n^3+n}{2n^2+n^2}.$$

נגדיר סדרה חדשה ע"י:

$$b_n = \frac{n^3+n}{2n^2+1}$$

כעת,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n}{2n^2+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{3n} = \lim_{n\to+\infty} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n} = +\infty$$

אנו מקבלים כי $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. מאי־השיוויון $a_n \geq b_n$ נסיק כי $\lim a_n = +\infty$.

3.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+1-1}{2n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{1+2n}\right)^{1+2n}}{1+\frac{1}{2n+1}} = \frac{e}{1}$$

שימו לב: $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$ מתכנסת, כי היא תת סדרה של $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ שידוע לנו שמתכנסת.

4.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n(n+1)}{(n+1)(n-1)}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{2n-1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{2n-2} \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{2(n-1)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)} \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)}\right] \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}=e^2$$

.5

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^4-5n+10}{n^4+n^3+100}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3n^4-5n+10}{n^4}}{\frac{n^4+n^3+100}{n^4}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3-\frac{5}{n^3}+\frac{10}{n^4}}{1+\frac{1}{n}+\frac{100}{n^4}}=3$$

$+\infty$ .6

$+\infty$ .7

.8

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2-2n-1}+\sqrt{n^2+2n-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2-2n-1}+\sqrt{n^2+2n-1}\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-2n-1-n^2-2n+1}{\left(\sqrt{n^2-2n-1}+\sqrt{n^2+2n-1}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-4n}{\left(\sqrt{n^2-2n-1}+\sqrt{n^2+2n-1}\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{-4n\cdot\frac{1}{n}}{\left(\sqrt{n^2-2n-1}+\sqrt{n^2+2n-1}\right)\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-4}{\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}\right)}=-2$$

1 .9

.10

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\arctan(n)}{\sqrt{n^2+5n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+5n+1}}+\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan(n)}{\sqrt{n^2+5n+1}}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+5n+1}}{n}}+\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan(n)}{\sqrt{n^2+5n+1}}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}}+\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan(n)}{\sqrt{n^2+5n+1}}=$$

$$=1+\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan(n)}{\sqrt{n^2+5n+1}}$$

כעת מהגדרת הפונקציה $\arctan$,

$$-\frac{\pi}{2}<\arctan(n)<\frac{\pi}{2}$$

ולכן

$$\frac{-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n^2+5n+1}}\leq\frac{\arctan(n)}{\sqrt{n^2+5n+1}}\leq\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n^2+5n+1}}$$

הגבול באינסוף של הסדרות השמאלית והימנית הוא אפס (וודאו זאת...) ולכן ממשפט הסנדביץ' נקבל:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan(n)}{\sqrt{n^2+5n+1}}=0$$

ולסיכום:

$$1+\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan(n)}{\sqrt{n^2+5n+1}}=1$$

11. $N\geq\left\lfloor\frac{4}{\epsilon}\right\rfloor+1$