אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) - סמסטר א' תשע"ד
פתרון תרגיל 12

.1

1) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+5x^2-1\right)dx=3\int 3x^{-\frac{1}{2}}dx+5\int x^2dx-\int dx=6\sqrt{x}+\frac{5}{3}x^3-x+C$

2) $\int\frac{(\sqrt{x}+3)^2}{x}dx=\int\frac{x+6\sqrt{x}+9}{x}dx=\int\left(1+\frac{6}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x}\right)dx=x+12\sqrt{x}+9\ln|x|+C$

3) $\int\frac{dx}{3x^2+2x+5}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{3})^2+\frac{14}{9}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}\arctan\frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{14}}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{14}}\arctan\frac{3x+1}{\sqrt{14}}+C$

4) $$\int\frac{5x-1}{\sqrt{7-6x-x^2}}dx=-\frac{5}{2}\int\frac{-2x-6}{\sqrt{7-6x-x^2}}dx-16\int\frac{dx}{\sqrt{16-(x+3)^2}}=$$
$$=-5\sqrt{7-6x-x^2}-16\arcsin\frac{x+3}{4}+C$$

5) $\int\frac{2x+1}{sin^2(x^2+x+3)}dx=-\cot(x^2+x+3)+C$

6) $\int\frac{\sqrt{\ln(3x+1)}}{3x+1}dx=\frac{1}{3}\int(\ln(3x+1))^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{3x+1}dx=\frac{2}{9}\sqrt{\ln^3(3x+1)}+C$

7) $2\sqrt{x+1}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$

8) נבצע אינטגרציה בחלקים כאשר $u=x+2, v'=e^x$ ולכן $u'=1, v=e^x$.
$$\int(x+2)e^xdx=(x+2)e^x-\int e^xdx=(x+2)e^x-e^x+C=(x+1)e^x+C$$

9) נבצע אינטגרציה בחלקים כאשר $u=\arcsin x, v'=1$ ולכן $u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, v=x$.
$$\int\arcsin x dx=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$$

10) $(x+1)\tan x+\ln|\cos x|+C$

11) נפתור ע"י הצבה $t=e^x$ ולכן $dt=e^xdx$.
$$\int e^x\ln(e^x+1)dx=\int\ln(t+1)dt$$
נבצע כעת אינטגרציה בחלקים כאשר $u=\ln(t+1), v'=1$ ולכן $u'=\frac{1}{t+1}, v=t$.
$$\int e^x\ln(e^x+1)dx=\int\ln(t+1)dt=t\ln(t+1)-\int\frac{t}{t+1}dt=t\ln(t+1)-\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=$$
$$=t\ln(t+1)-\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=t\ln(t+1)-t+\ln|t+1|+C=$$
$$=e^x\ln(e^x+1)-e^x+\ln(e^x+1)+C=(e^x+1)\ln(e^x+1)-e^x+C$$

12) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{6\sqrt{5}}\arctan\frac{x}{\sqrt{5}}+C$

13) $\frac{x^3}{3}+4x-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{31}{8}\ln|x-2|+\frac{29}{8}\ln|x+2|+C$

14) $\frac{5}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{2x}+C$

15) $x+\ln|x-1|-\ln|x+1|-2\arctan x+C$

16) נפתור ע"י הצבה $t=\sin x$ ולכן $dt=\cos xdx$.
$$\int\frac{\cos^7 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{(1-\sin^2 x)^3}{sin^2x}\cos xdx=\int\frac{(1-t^2)^3}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t^2}-3+3t^2-t^4\right)dt=$$
$$=-\frac{1}{t}-3t+t^3-\frac{t^5}{5}+C=-\frac{1}{\sin x}-3\sin x+\sin^3 x-\frac{\sin^5 x}{5}+C$$

17) נפתור ע"י הצבה $t=1+\tan x$ ולכן $dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx$.
$$\int\frac{dx}{(\cos x+\sin x)^2}=\int\frac{dx}{\cos^2 x(1+\tan x)^2}dx=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{1+\tan x}+C$$

18) $$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int\frac{\sin^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\cos^6 x}dx=\int\left(\tan^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+\tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$$

19) $\int\sin 5x\sin 6xdx=\frac{1}{2}\int(\cos x-\cos 11x)dx=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{22}\sin 11x+C$

20) $2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+C$

21) $\frac{12}{13}\sqrt[12]{x^{13}}-x+\frac{12}{11}\sqrt[12]{x^{11}}-\frac{6}{5}\sqrt[12]{x^{10}}+C$

22) $-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}+C$

23) $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C$

24) $\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

25) נפתור ראשית את האינטגרל הלא־מסויים, ולבסוף נציב את גבולות האינטגרציה לקבלת האינטגרל המסויים.

נבצע אינטגרציה בחלקים כאשר $u=\ln^2 x, v'=x^{-\frac{1}{2}}$ ולכן $u'=\frac{2\ln x}{x}, v=2\sqrt{x}$.

$$\int\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln^2 x-4\int\sqrt{x}\cdot\frac{\ln x}{x}dx=2\sqrt{x}\ln^2 x-4\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

נפתור את האינטגרל הימני בעזרת אינטגרציה בחלקים, כאשר הפעם $u=\ln x, v'=x^{-\frac{1}{2}}$ ולכן $u'=\frac{1}{x}, v=2\sqrt{x}$.

$$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x-\int\frac{2\sqrt{x}}{x}dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$$

לכן נקבל

$$\int\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln^2 x-8\sqrt{x}\ln x+16\sqrt{x}+C$$

לבסוף נחזור לאינטגרל המסויים:

$$\int_1^e\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx=\left(2\sqrt{x}\ln^2 x-8\sqrt{x}\ln x+16\sqrt{x}\right)|_1^e=10\sqrt{e}-16$$

26) נפתור ע"י הצבה

$$t=\sqrt{1-x^2}\Longrightarrow x=\sqrt{1-t^2}\Longrightarrow dx=-\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$$

ולכן

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{1-t^2}\cdot t\cdot\frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int t^2dt=-\frac{t^3}{3}=-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

השמטנו את גבולות האינטגרציה במעבר ל־t, והחזרנו אותם כאשר עברנו שוב למשתנה x .

27) $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2(\sqrt{3}-1)}\right)-\frac{\arctan 3}{2}+\frac{\pi}{6}$

28) $\frac{\pi}{4}$

29) $4\ln 4-4\ln 5+1$

2. הוכחת נוסחאות

1) נסמן $J_n=\int\sin^n xdx$. הוכחת הנוסחא נעשית באנדוקציה על n. בסיס האינדוקציה פשוט ומושאר כתרגיל לקורא. את שלב האינדוקציה נפתור ע"י אינטגרציה בחלקים כאשר $u=\sin^{n-1}x, v'=\sin x$ ולכן $u'=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x, v=-\cos x$.

$$J_n=\int\sin^n xdx=-\sin^{n-1}x\cos x+\int(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=$$
$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx=$$
$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)J_{n-2}-(n-1)J_n$$

נעביר אגפים ונקבל $nJ_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)J_{n-2}$ ולכן

$$J_n=\int\sin^n xdx=\frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}J_{n-2}=\frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}xdx$$

2) ההוכחה דומה לסעיף הקודם

3) ראשית, עבור $n \neq m$ ניעזר בזהות טריגונומטרית:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\right)dx =$$
$$= \left(\frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} - \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

בגלל שפונקציית סינוס בעלת מחזור 2π.

בדומה, עבור $n = m$ נקבל מאותה זהות

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(nx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2nx)dx = (\frac{x}{2} - \frac{\sin(2nx)}{4n})|_0^{2\pi} = \pi$$

3. (א) 0

(ב) $\sqrt{6} - \frac{4}{3}$

(ג) הסכום $\sum_{k=1}^{2n} \frac{\pi}{n}\cdot\cos^2(\frac{k\pi}{n}) = \frac{\pi}{n}\left(\cos^2(\frac{\pi}{n}) + \cos^2(\frac{2\pi}{n}) + \cos^2(\frac{3\pi}{n}) + ... + \cos^2(2\pi)\right)$ הינו סכום רימן של הפונקציה $f(x) = cos^2 x$ על הקטע $[0, 2\pi]$.

היות שזו פונקציה רציפה, היא אינטגרבלית, ולכן הגבול של סכומי רימן הוא האינטגרל של הפונקציה על הקטע. לכן

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\pi}{n}\cdot\cos^2(\frac{k\pi}{n}) = \int_0^{2\pi}\cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2x))dx = \frac{1}{2}(x + \frac{\sin(2x)}{2})|_0^{2\pi} = \pi$$

4. (א) התחום הסופי $S = \{(x,y) : y \leq (x+2)^2, y \leq 4-x, y \geq 0\}$ מורכב מהשטח החסום בין $y = (x+2)^2$ וציר x בקטע $[-2, 0]$, והשטח החסום בין $y = 4 - x$ וציר x בקטע $[0, 4]$,

לכן השטח הינו:

$$\int_{-2}^0 (x+2)^2 dx + \int_0^4 (4-x)dx = \frac{32}{3}$$

(ב) $\frac{8}{3}$

(ג) $e^2 + e^{-2} - 2$

5. $\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$

6.

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} e^{t^2}dt = \frac{d}{dx}\left(\int_1^{x^2} e^{t^2}dt - \int_1^x e^{t^2}dt\right) =$$
$$= \frac{d}{dx}\int_1^{x^2} e^{t^2}dt - \frac{d}{dx}\int_1^x e^{t^2}dt = \frac{d}{dx}\int_1^{x^2} e^{t^2}dt - e^{x^2}$$

כאשר השיוויון האחרון נובע ישירות מהמשפט היסודי של החדו"א. לחישוב המחובר הימני נסמן $u = u(x) = x^2, J(u) = \int_1^u e^{t^2}dt$. ואז

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} e^{t^2}dt = \frac{d}{dx}J(u) = J'(u)u'(x) = \left(\frac{d}{du}\int_1^u e^{t^2}dt\right)\cdot 2x = 2xe^{u^2} = 2xe^{x^4}$$

נקבל לבסוף $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} e^{t^2}dt = 2xe^{x^4} - e^{x^2}$