אוניברסיטת בן־גוריון בנגב – המחלקה למתמטיקה
חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) – סמסטר א' תשע"ד
תרגיל 11 – פתרונות

1. (א) הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

פתרון: נוכיח את הטענה באינדוקציה. המקרה הבסיסי טריוויאלי: $1 = \frac{2^2}{4}$. שלב האינדוקציה: נניח את הטענה עבור $n \in \mathbb{N}$. אזי

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right]$$
$$= (n+1)^2\left[\frac{n^2+4n^2+4}{4}\right] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

לכן הטענה מתקיימת עבור $n+1$, ולכן מתקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$.

(ב) חשבו $\int_0^1 x^3\,dx$ ע"פ הגדרת האינטגרל המסויים.

פתרון: הפונקציה $f(x) = x^3$ רציפה על $[0,1]$ ולכן f אינטגרבילית על $[0,1]$. יהי $n \in \mathbb{N}$. נתבונן בחלוקה ל־ n חלקים שווים עם נקודות מדגם נתונות ע"י הקצוות הימיניות של כל חלק:

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0,1,\ldots,n \qquad\qquad x_i^* = x_i, \qquad i = 1,\ldots,n$$

נשים לב כי $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ לכל $i = 1,2,\ldots n$. מכיוון ש f אינטגרבילית,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^3}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

(ג) חשבו $\int_{-1}^0 x^3\,dx$ ע"פ הגדרת האינטגרל המסויים.

פתרון: ע"פ חישוב דומה לזה שנעשה בסעיף א' נקבל כי $\int_{-1}^0 x^3\,dx = -\frac{1}{4}$.

(ד) השתמשו בסעיפים הקודמים כדי לחשב את $\int_{-1}^1 x^3\,dx$.

פתרון: ע"פ חוקי האינטגרל $\int_{-1}^1 x^3\,dx = \int_{-1}^0 x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$.

2. חשבו את $\int_0^t e^x\,dx$ ע"פ הגדרת האינטגרל המסויים, כאשר $t > 0$ מספר קבוע.

פתרון: הפונקציה $f(x) = e^x$ רציפה על $[0,t]$ ולכן f אינטגרבילית על $[0,t]$. יהי $n \in \mathbb{N}$. נתבונן בחלוקה ל־ n חלקים שווים עם נקודות מדגם נתונות ע"י הקצוות השמאליות של כל חלק:

$$x_i = i\cdot\frac{t}{n}, \quad i = 0,1,\ldots,n, \qquad\qquad x_i^* = x_{i-1}, \quad i = 1,\ldots,n$$

נשים לב כי $\Delta x_i = \frac{t}{n}$ לכל $i = 1,2,\ldots n$. מכיוון ש f אינטגרבילית,

$$\int_0^t f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{(i-1)t}{n}}\cdot\frac{t}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{t}{n}}\right)^{i-1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{t}{n}\cdot\frac{\left(e^{\frac{t}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{t}{n}} - 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{t(e-1)}{n(e^{\frac{t}{n}} - 1)} = \lim_{n\to\infty}(e-1)\cdot\frac{\frac{t}{n}}{e^{\frac{t}{n}} - 1} = e - 1$$

השתמשנו ברמז כדי לכתוב

$$\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{t}{n}}\right)^{i-1}=1+e^{\frac{t}{n}}++e^{\frac{2t}{n}}+\cdots+e^{(n-1)\frac{t}{n}}=\frac{\left(e^{\frac{t}{n}}\right)^{n}-1}{e^{\frac{t}{n}}-1}$$

3. חשבו את השטח התחום החסום בין גרפי הפונקציות $f(x)=x^2$ ו־ $g(x)=x^3$.

פתרון: קל לבדוק שהפונקציות נחתכות בנקודות 0,1, וכי בקטע $[0,1]$ מתקיים $f(x)\geq g(x)$. לכן

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^1(f(x)-g(x))\,dx=\int_0^1(x^2-x^3)\,dx\\&=\int_0^1x^2\,dx-\int_0^1x^3\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

השתמשנו באינטגרל $\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$ שחישבנו בשיעור וגם בשאלה מס' 1.

4. הוכיחו את אי־השוויונים הבאים:

(א) $0\leq\int_1^5\frac{\ln x}{x}\,dx\leq\frac{4}{e}$

פתרון: תהי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ הפונקציה הנתונה ע"י $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. נשים לב כי f רציפה וגזירה, ו־ $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. לכן $f'(x)>0$ כאשר $x<e$, ו־ $f'(x)<0$ כאשר $x>e$. כלומר f מקבלת מקסימום גלובלי בנקודה $x=e$. בנוסף, מתקיים כי $\ln x\geq 0$ ולכן $f(x)\geq 0$ כאשר $x\in[1,5]$. אזי לכל $x\in[1,5]$ מתקיים כי

$$0\leq f(x)\leq f(e)\iff 0\leq\frac{\ln x}{x}\leq f(e)=\frac{1}{e},$$

ולכן

$$0=\int_1^5 0\,dx\leq\int_1^5\frac{\ln x}{x}\,dx\leq\int_1^5\frac{1}{e}\,dx=(5-1)\cdot\frac{1}{e}=\frac{4}{e}$$

(ב) $2\sqrt{2}\leq\int_1^3\sqrt{x^2+1}\,dx\leq 2\sqrt{10}$

פתרון: לכל $x\in[1,3]$ מתקיים כי $1\leq x^2\leq 9$, לכן $\sqrt{2}\leq\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{10}$. אזי

$$2\sqrt{2}=\int_1^3\sqrt{2}\,dx\leq\int_1^3\sqrt{x^2+1}\,dx\leq\int_1^3\sqrt{10}\,dx=2\sqrt{10}$$

(ג) $1\leq\int_0^1 e^{x^2}\,dx\leq e$

פתרון: לכל $x\in[0,1]$ מתקיים כי $0\leq x^2\leq 1$, לכן $1=e^0\leq e^{x^2}\leq e^1$ משום ש־ e^x הינה פונקציה עולה. אזי

$$1=\int_0^1 1\,dx\leq\int_0^1 e^{x^2}\,dx\leq\int_0^1 e\,dx=e$$

5. (א) חשבו את $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

פתרון: מדובר על שטח רבע מעגל עם רדיוס 1, לכן $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$.

(ב) חשבו את $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$.

פתרון: נתבונן בסכומי רימן של $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ מתאימים לחלוקות שוות, ונקודות מדגם נתונות ע"י קצוות שמאליות של כל חלק:

$$x_k=\frac{k}{n},\quad k=0,1,\ldots,nx_k^*=x_k,\quad k=1,\ldots,n$$

אזי נובע מאינטגרביליות של הפונקציה הרציפה $\sqrt{1-x^2}$ כי

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}\end{aligned}$$

לכן נובע מהסעיף הקודם כי $\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$.

6. חשבו את $\int_{0.25}^{4.3}\lfloor x\rfloor\,dx$.

פתרון:

$$\begin{aligned}\int_{0.25}^{4.3}\lfloor x\rfloor\,dx &= \int_{0.25}^{1}\lfloor x\rfloor\,dx + \int_{1}^{2}\lfloor x\rfloor\,dx + \int_{2}^{3}\lfloor x\rfloor\,dx + \int_{3}^{4}\lfloor x\rfloor\,dx + \int_{4}^{4.3}\lfloor x\rfloor\,dx\\ &= \int_{0.25}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{2} 1\,dx + \int_{2}^{3} 2\,dx + \int_{3}^{4} 3\,dx + \int_{4}^{4.3} 4\,dx\\ &= 0 + (2-1)\cdot 1 + (3-2)\cdot 2 + (4-3)\cdot 3 + (4.3-4)\cdot 4\\ &= 0+1+2+3+1.2 = 7.2\end{aligned}$$

7. חשבו את נפח גוף הסיבוב סביב ציר ה־x של הפונקציה $f(x)=3x-2$ בקטע $[1,3]$.

פתרון:

$$\begin{aligned}V &= \int_1^3 \pi[f(x)]^2\,dx = \int_1^4 \pi(3x-2)^2\,dx = \pi\int_1^3 (9x^2-6x+4)\,dx\\ &= \pi\left[9\int_1^3 x^2\,dx - 6\int_1^3 x\,dx + \int_1^3 4\,dx\right]\end{aligned}$$

למדנו כי

$$\int_1^3 4\,dx = 4(3-1) = 8$$

יהי $c>0$. שטח המשולש אם בסיס c וגובה c הוא $\frac{c^2}{2}$ לכן

$$\int_0^c x\,dx = \frac{c^2}{2}$$

אנו מקבלים

$$\int_1^3 x\,dx = \int_0^3 x\,dx - \int_0^1 x\,dx = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4$$

הוכחנו בשיעור כי $\int_0^c x\,dx = \frac{c^3}{3}$, לכן

$$\int_1^3 x^2\,dx = \int_0^3 x^2\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

אזי

$$V = \pi\left[9\int_1^3 x^2\,dx - 6\int_1^3 x\,dx + \int_1^3 4\,dx\right] = \pi\left[9\cdot\frac{26}{3} - 6\cdot 4 + 8\right] = 62\pi.$$

8. הוכיחו כי נפח החרוט בעל גובה h ורדיוס בסיס r הוא $\frac{\pi r^2 h}{3}$.

רמז: מצאו שיפוע $m \in \mathbb{R}$ מתאים כך שגוף הסיבוב סביב ציר ה־x של $y = mx$ בקטע $[0, h]$ מהווה חרוט בעל גובה h ורדיוס בסיס r.

פתרון: השיפוע המתאים הוא $m = \frac{r}{h}$. לכן

$$V = \int_0^h \pi[f(x)]^2\,dx = \int_0^h \pi[\frac{r}{h}x]^2\,dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

9. יהי L אורך הגרף של $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ כאשר $x \in [1, 3]$. הוכחו כי $\frac{\sqrt{39}}{3} \le L \le \sqrt{5}$.

פתרון: נשים לב כי $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. לכן

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx$$

לכל $x \in [1, 3]$ מתקיים כי

$$\frac{\sqrt{39}}{6} = \sqrt{1 + \frac{1}{4\cdot 3}} \le \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \le \sqrt{1 + \frac{1}{4\cdot 1}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

לכן

$$\frac{\sqrt{39}}{6}\cdot(3-1) \le \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx \le \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot(3-1) \implies \frac{\sqrt{39}}{3} \le L \le \sqrt{5}$$