תשובות לתרגיל 10
חדו"א להנדסת מכונות 1
סמסטר א' תשע"ד

1. תהי $f(x)=x^{123}(1-x)^{321}$. מתקיים

$$f'(x)=x^{122}(1-x)^{321}-321x^{123}(1-x)^{320}=x^{122}(1-x)^{320}\left(123-444x\right)$$

לכן $f'(x)=0$ כאשר $x=0$,$x=1$ או $x=\frac{123}{444}$. מתקיים $f(0)=f(1)=0$,

$$f\left(\frac{123}{444}\right)=\frac{123^{123}321^{321}}{444^{444}}.$$

מכיוון ש - $x=\frac{123}{444}$ היא הנקודה היחידה בקטע הפתוח $(0,1)$ שבא הנגזרת של f מתאפסת וערך הפונקציה בנקודה זו גדול הערכי הפונקצה בקצוות הקטע $[0,1]$, זוהי נקודת המקסימום של f בקטע $[0,1]$. כלומר, לכל x בקטע $[0,1]$ מתקיים

$$f(x)\leq\frac{123^{123}321^{321}}{444^{444}}.$$

2. מצא את שטח הפנים המינימלי של חבית בצורת גליל שנפח שלה הוא $1000cm^3$:

שטח הפנים של חבית בצורת גליל בעלת רדיוס r וגובה h הוא

$$A=2\pi r^2+2\pi r\cdot h.$$

נתון שנפח החבית הוא $\pi r^2h=1000$, ולכן מתקיים $h=\frac{1000}{\pi r^2}$.
נציב ונקבל ששטח הפנים כפונקציה של הרדיוס הוא

$$A(r)=4\pi r-\frac{2000}{r^2}.$$

כאשר הנוסחה תקפה אם $r>0$. נגזור ונקבל ש-

$$A'(r)=\frac{4\pi r^3-500}{r^2}.$$

בדיקת סימן הנגזרת מראה שהמינימום מתקבל ב- $r=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$.

3. (א) המהירת הרגעית שבא בסיס הסולם מתרחק מהקיר כאשר הזוית בין הסולם לקרקע היא $\frac{\pi}{3}$ היא $10\cdot\sqrt{3}$ סנטימטר לשנייה.
(ב) המהירת הרגעית שבא בסיס הסולם מתרחק מהקיר כאשר הזוית בין הסולם לקרקע היא $\frac{\pi}{4}$ היא 10 סנטימטר לשנייה.

4. נסמן ב- $h(t)$ את גובה מפלס המים בזמן t, וב- $V(t)$ את נפח המיים בזמן t. מתקיים $V(t)=\frac{1}{3}\pi\cdot(h(t))^3$. לכן $h(t)=\sqrt[3]{3\frac{V(t)}{\pi}}$. נתון ש- $\frac{dV}{dt}(t)=2\frac{L}{sec}$. על פי כלל השרשרת:

$$\frac{dh}{dt}(t)=\frac{dh}{dV}(V(t))\cdot\frac{dV}{dt}(t)=\frac{\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{\pi}}\left(\ V(t)\right)^{-2/3}\cdot 2\frac{L}{sec}$$

בזמן $t=0$ $V(0)=10$, נציב $t=0$ כדי לקבל תשובה סופית.

5. (א) הוכיחו שלכל $0 < x < y$ ו־ $a \geq 1$

$$(\frac{x+y}{2})^a \leq \frac{1}{2}x^a + \frac{1}{2}y^a$$

הפונקציה $f(x) = x^a$ מקיימת $f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$, ולכן עבור $a > 1$ הנגזרת השנייה חיובית בקטע $(0, +\infty)$, ולכן קמורה שפ לכן לכ $0 < x < y$,

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

(ב)

$$\arctan(x+1) - \arctan(x) \geq \arctan(x+2) - \arctan(x+1)$$

הפונקציה $f(x) = \arctan(x)$ מקיימת $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, ולכן בקטע $(0, \infty)$ f קעורה.

6. $\theta = \arctan \mu.$

7. תהי $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

(א) ל־f אין אסיפטוטה אנכית. f רציפה בתחום הגדרתה הטבעי $x \neq 0$, ובנקודה $x = 0$ מתקיים $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

(ב) ל ־f אסיפטוטה אופקית $y = 0$ כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(ג) פונקציה יכול להחתך עם אסיפטוטה אנכית שלה , למשל אם $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ אבל $g(a) = 0$. לדוגמא: $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(ד) הגרף של פונקציה יכול להחתך עם אסיפטוטה אופקית אינסוף פעמים. כך בדוגמא $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.