שיעור 2

1. פונקציה ממשית (המשך)

פונקציה מונוטונית

- פונקציה f נקראת מונוטונית עולה בתחום אם לכל $x_1 < x_2$ בתחום מתקיים $f(x_1) < f(x_2)$

דוגמא - פונקציה $f(x) = 3x - 10$ מונוטונית עולה בכל תחום הגדרתה

- פונקציה f נקראת מונוטונית יורדת בתחום אם לכל $x_1 < x_2$ בתחום מתקיים $f(x_1) > f(x_2)$

דוגמא - פונקציה $f(x) = -5x + 2$ מונוטונית יורדת בכל תחום הגדרתה

דוגמא לפונקציה לא מונוטונית $f(x) = x^2$

(מונוטונית יורדת בתחום $x \le 0$ ו מונוטונית עולה בתחום $x \le 0$)

פונקציה מחזורית

- פונקציה f נקראת מחזורית עם מחזור $T > 0$ אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים $f(x+T) = f(x)$

דוגמאות לפונקציה מחזוריות

$f(x) = \sin x, f(x) = \cos x$ עם מחזור $T = 2\pi$

$f(x) = \tan x, f(x) = \cot x$ עם מחזור $T = \pi$

$f(x) = x - [x]$ עם מחזור $T = 1$

($[x]$ נקרא חלק שלם של x - המספר השלם $[x]$ הגדול ביותר כך ש- $[x] \le x$

לדוגמא $[3.4] = 3, [3.9999] = 3, [3] = 3, [-3.4] = -4, [-3.00001] = -4$)

2. סדרת מספרים היא פונקציה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ אותה נהוג להציג על ידי נוסחת הסדרה $a_k=f(k)$ או בצורה

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}=\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots\}$$

סדרה חסומה(חסומה בערך מוחלט)

קיים מספר M כך שלכל $k\in\mathbf{N}$ מתקיים $|a_k|\le M$ (M נקרא חסם מוחלט)

דוגמא - $\left\{1,\ -\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16}\dots\right\}$ סדרה הרמונית

חסומה מלמעלה – קיים מספר M כך שלכל $k\in\mathbf{N}$ מתקיים $a_k\le M$

(M נקרא חסם מלעיל , חסם מלעיל הקטן ביותר נקרא חסם עליון)

דוגמא - $\{10+3k-k^2\}_{k=1}^{\infty}$

חסומה מלמטה – קיים מספר m כך שלכל $k\in\mathbf{N}$ מתקיים $a_k\ge m$

(m נקרא חסם מלרע , חסם מלרע הגדול ביותר נקרא חסם תחתון)

דוגמא - $\{-10-3k+k^2\}_{k=1}^{\infty}$

סדרה מונוטונית(עולה או יורדת)

סדרה מונוטונית עולה $a_k\le a_{k+1}$ לכל $k\in\mathbf{N}$

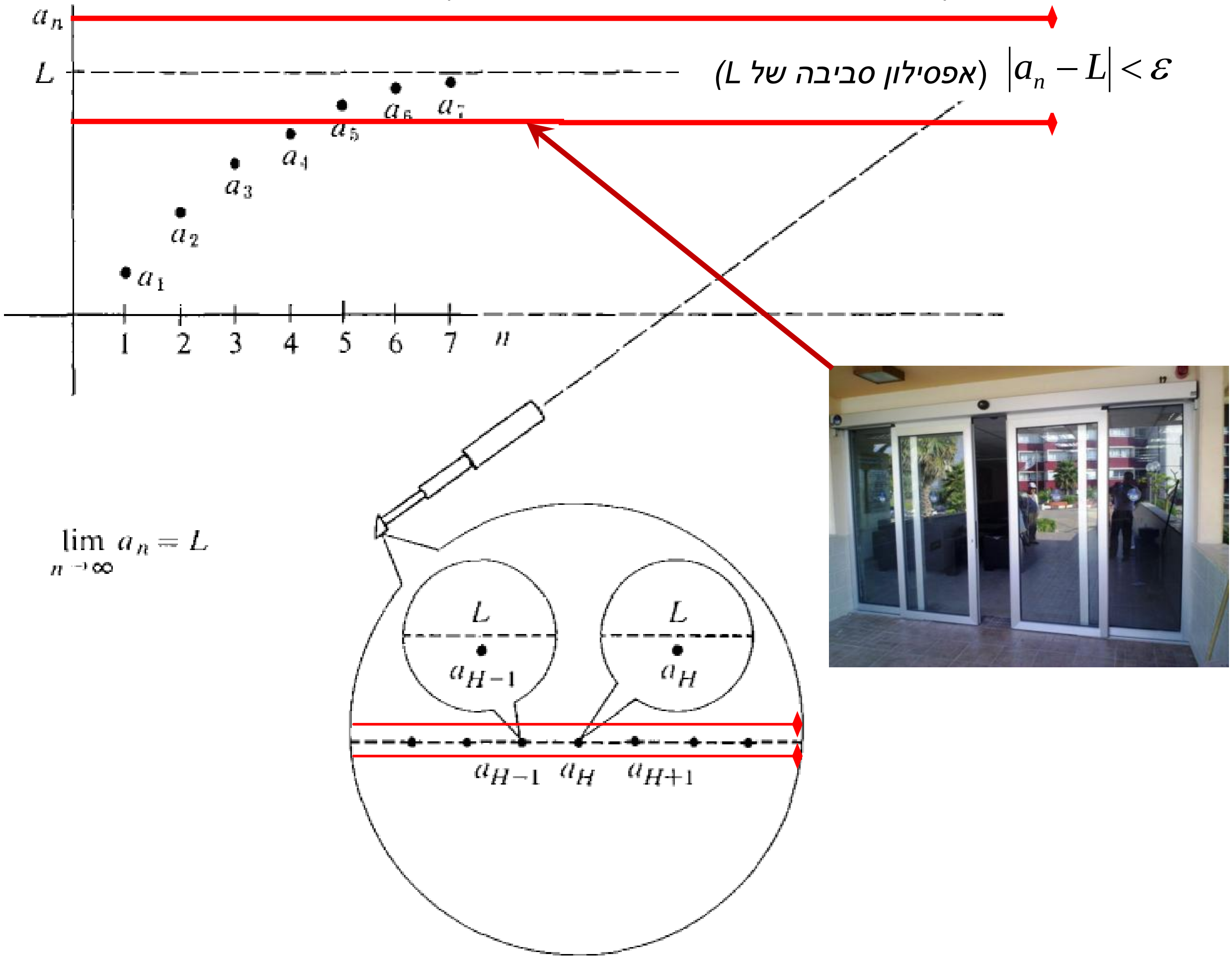
דוגמא - $\{1,2,4,8,\dots\}$

סדרה מונוטונית יורדת $a_k\ge a_{k+1}$ לכל $k\in\mathbf{N}$

דוגמא - $\left\{1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}\dots\right\}$

דוגמא לסדרה לא מונוטונית $\left\{1,\ -\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16}\dots\right\}$

גבול של סדרה *(ערך אליו שואף האיבר הכללי של הסדרה)* $k \in \mathbf{N}$



הגדרה

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$

במידה ולסדרה קיים גבול סופי L אומרים כי הסדרה מתכנסת ל- L , אחרת אומרים כי הסדרה מתבדרת(שואפת לאינסוף או לא שואפת לאף גבול)

הגדרה

חלק שלם של מספר $[x]$ - המספר השלם $m \le x$ הגדול ביותר

לדוגמא $[-5.1] = -6 \quad [0.7] = 0 \quad [5.99] = 5 \quad [5.1] = 5$

תכונה חשובה – לכל x מתקיים $[x] + 1 > x$

תרגיל 1

הוכח ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{5n+7}{n+3} = 5$

תכנון הוכחה

רוצים לכל $\varepsilon > 0$ להתאים את n_0 כך שלכל $n > n_0$ יתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$

לכן $\left|\frac{5n+7}{n+3} - 5\right| < \varepsilon$

ולכן $\left|\frac{5n+7-5n-15}{n+3}\right| < \varepsilon$

$$\left|-\frac{8}{n+3}\right| = \frac{8}{n+3} < \varepsilon$$

$$n+3 > \frac{8}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left[\frac{8}{\varepsilon}\right]$$

הוכחה

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 = \left[\frac{8}{\varepsilon}\right] + 1$ (חלק שלם) כך שלכל $n > n_0 = \left[\frac{8}{\varepsilon}\right] + 1$

מתקיים $n > \frac{8}{\varepsilon}$ ולכן $n+3 > \frac{8}{\varepsilon}$ מכאן $\left|-\frac{8}{n+3}\right| = \frac{8}{n+3} < \varepsilon$

$$\left|\frac{5n+7-5n-15}{n+3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{5n+7}{n+3} - 5\right| < \varepsilon$$

לכן $|a_n - L| < \varepsilon$ הוכחנו את הטענה $\square$