

# מבוא לאלגברה ליניארית

אמנון יקותיאל  
המחלקה למתמטיקה  
אוניברסיטת בן גוריון  
amyekut@math.bgu.ac.il

חוברת זו מיועדת לקורס "מבוא לאלגברה ליניארית" לתלמידי הנדסה באוניברסיטת בן גוריון. זה קורס של סמסטר אחד (בדרך כלל 26 הרצאות של שעתיים כל אחת). החומר כולל פתרון מערכות משוואות ליניאריות, מרחבים וקטוריים, חשבון מטריצות, טרנספורמציות ליניאריות וליכסון אופרטורים. החומר מוגש בצורה מדויקת מבחינה מתמטית, ורוב המשפטים מוכחים. יוצא דופן הוא הטיפול בדטרמיננטות, שם דילגתי על ההוכחות (מקוצר זמן) והסתפקתי בהפנייה לספרים אחרים. בכל פרק משולבות דוגמאות רבות. בעתיד יתכן שאוסיף לחוברת תרגילים. החוברת מבוססת על רשימות בכתב יד שהכנתי בעת שלימדתי את הקורס בשנים 1999 – 2002. בהכנת הרשימות נעזרתי ברשימותיו של עידו אפרת, ושאלתי מהן הרבה מן החומר התאורטי, הסימונים והדוגמאות המספריות. ברצוני להודות לעידו אפרת על הסכמתו לשימוש ברשימותיו. החוברת מיועדת להפצה בחינם דרך הרשת, בפורמט pdf הניתן לקריאה בתוכנת Adobe Acrobat. התנאי להפצה הוא שהחוברת תישמר בשלמותה וללא שינויים. ניתן להוריד את הקובץ מהאתר שלי:

<http://www.math.bgu.ac.il/~amyekut>

הערות, תיקונים והצעות לשיפור יתקבלו בברכה. ברצוני להודות לאנדריי מלניקוב על העבודה המסורה בהכנת גרסת ה־ LaTeX. תודה לרמה פורת ואמנון בסר על הסיוע הטכני ב־ LaTeX בעברית.

## תוכן הענינים

3	א. שדות
10	ב. משוואות ליניאריות
24	ג. מרחבים וקטוריים
47	ד. חשבון מטריצות
60	ה. דטרמיננטות
66	ו. טרנספורמציות ליניאריות
81	ז. ערכים עצמיים וליכסון אופרטורים

מהדורה שלישית 16.2.2005

## מבוא

נקודת המוצא של הקורס היא פתרון מערכת של משוואות ליניאריות, כלומר משוואות ממעלה ראשונה במספר נעלמים. כולנו יודעים לפתור מערכת כדוגמת

$$2x + 4y = 0$$

$$. 5x + 12y = 8$$

אולם נשאלות השאלות הבאות:

- כיצד פותרים מערכת שבה הרבה נעלמים?
- כיצד פותרים מערכת שבה הרבה משוואות?
- האם בכלל קיימים פתרונות למערכת המשוואות? אם כן אז כמה?

במהלך הדיון בכיתה במערכות משוואות ליניאריות יופיעו באופן טבעי המושגים **מרחב וקטורי** ו- **מטריצה**. אלו נושאים חשובים בפני עצמם. המרחב הוקטורי הוא מושג מרכזי בגיאומטריה, בפיסיקה (למשל המרחב הוקטורי  $\mathbb{R}^3$ , שהוא המרחב של המכניקה הניוטונית), בתורת הפונקציות (מרחבי הילברט) ובתורת ההצפנות (מרחבים וקטוריים מעל שדות סופיים). חשבון מטריצות משמש בין היתר לטרנספורם פורייה מהיר (FFT), טכניקה נפוצה בעיבוד אותות. ליכסון מטריצות חשוב מאוד להרבה מטרות, למשל לפתרון משוואות דיפרנציאליות או לניתוח תהליכי מרקוב.

ספרים נוספים לעיון ותירגול:

1. Hoffman and Kunze, "Linear Algebra", Prentice-Hall 1971.
2. ברמן וקון, "אלגברה ליניארית", הוצאת בק 1999.
3. ליפשוץ, "אלגברה ליניארית", סדרת שאום 1991; מהדורה עברית 1993.
4. עמיצור, "אלגברה א'", הוצאת אקדמון 1970.

## א. שדות

במשוואות שלנו יופיעו מספרים מסוגים שונים, ונתחיל את הקורס בנושא זה. ראשית הנה רשימה של כמה קבוצות מספרים וסימוליהן המקובלים.

- (1) המספרים הטבעיים  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- (2) המספרים השלמים  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- (3) המספרים הרציונליים  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}; n \neq 0\}$
- (4) המספרים הממשיים  $\mathbb{R}$

נזכיר שכל מספר ממשי  $a$  ניתן לייצוג ע"י פיתוח עשרוני

$$a = n.d_1d_2d_3\dots$$

כאשר  $n$  מספר שלם ו-

$$d_1, d_2, d_3, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

הפיתוח העשרוני הוא יחיד, מלבד המקרה של 9 במחזור, כמו למשל

$$0.999\dots = 1.000\dots$$

המשמעות של הפיתוח העשרוני היא ש-

$$a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_j$$

כאשר  $a_j$  הוא המספר הרציונלי

$$a_j := n.d_1\dots d_j = n + d_1 \cdot 10^{-1} + \dots + d_j \cdot 10^{-j}$$

כעת נגדיר קבוצה חדשה של מספרים.

**הגדרה 1. מספר מרוכב** הינו זוג  $(a, b)$  של מספרים ממשיים. נסמן ב- $\mathbb{C}$  את קבוצת המספרים המרוכבים, כלומר

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{\text{זוגות סדורים של מספרים ממשיים}\}$$

נגדיר פעולות חיבור וכפל על הקבוצה  $\mathbb{C}$ .

חיבור:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

כפל:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$$

נשים לב כי שני מספרים מרוכבים  $z_1 = (a_1, b_1)$  ו- $z_2 = (a_2, b_2)$  הם שווים אם  $a_1 = a_2$  ו- $b_1 = b_2$ .

יהיו  $a_1$  ו- $a_2$  מספרים ממשיים. נתבונן במספרים המרוכבים  $(a_1, 0)$  ו- $(a_2, 0)$ . רואים כי

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0)$$

ו-

$$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1a_2, 0)$$

זאת אומרת שההתאמה  $a \mapsto (a, 0)$  שומרת על פעולות החיבור והכפל. כמו כן לכל מספר מרוכב  $z$  מתקיים  $z + (0, 0) = z$  ו- $z \cdot (1, 0) = z$ . משום כך נזהה את המספר הממשי  $a$  עם המספר המרוכב  $(a, 0)$ , ובצורה זו נקבל הכלה  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . תהליך זיהוי זה דומה לאופן שבו מזהים את המספר השלם  $n$  עם המספר הרציונלי  $\frac{n}{1}$  ואשר באמצעותו מקבלים את ההכלה  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ . בתור תת-קבוצה של המספרים המרוכבים, המספרים הממשיים הם בדיוק המספרים  $z = (a, b)$  כך ש- $b = 0$ .

**הגדרה 2.** המספר המרוכב  $(0, 1)$  יסומן באות  $i$ .

התכונה המיוחדת של המספר  $i$  היא

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

כפי שנהוג עבור מספרים ממשיים גם כאן המוסכמה היא שפעולת הכפל קודמת לחיבור, ולכן ניתן להשיט סוגריים לפעמים; למשל  $z_1 + z_2 \cdot z_3 := z_1 + (z_2 \cdot z_3)$ . חישוב קצר עבור  $a, b \in \mathbb{R}$  מראה ש-

$$\begin{aligned} a + b \cdot i &= (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (a, 0) + (0, b) = (a, b) \end{aligned}$$

לכן נהוג לכתוב מספר מרוכב  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$  בצורה הבאה:  $z = a + b \cdot i$ . בסימון זה פעולות החשבון הן

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i \\ (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i \end{aligned}$$

עבור  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ .

**הגדרה 3.** יהא  $z = (a, b) = a + b \cdot i$  מספר מרוכב. **החלק הממשי** של  $z$  הוא  $\operatorname{Re}(z) := a$  ו-**החלק המדומה** של  $z$  הוא  $\operatorname{Im}(z) := b$ .

לכל מספר מרוכב  $z$  מתקיים השוויון

$$z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \cdot i$$

נשים לב כי  $\operatorname{Im}(z)$  הוא מספר ממשי.

מאחר שכל מספר מרוכב הוא זוג מספרים ממשיים, הרי כל מספר מרוכב מייצג נקודה במישור. לכן משתמשים בביטוי "המישור המרוכב", וזה התיאור הגיאומטרי של  $\mathbb{C}$ .

**טענה 1.** לכל שלושה מספרים מרוכבים  $z_1, z_2, z_3$  מתקיימות התכונות הבאות.

1. קומוטטיביות החיבור:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ .
2. אסוציאטיביות החיבור:  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ .
3. תכונת ה-0:  $z_1 + 0 = z_1$ .
4. הפכי חיבורי: קיים  $w \in \mathbb{C}$  כך ש-  $z_1 + w = 0$ .
5. קומוטטיביות הכפל:  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ .
6. אסוציאטיביות הכפל:  $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ .
7. תכונת ה-1:  $z_1 \cdot 1 = z_1$ .
8. דיסטריבוטיביות:  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$ .
9. הפכי כפלי: אם  $z_1 \neq 0$  אז קיים  $w$  כך ש-  $z_1 \cdot w = 1$ .

**הוכחה חלקית.** נרשום  $z_n = a_n + b_n \cdot i$  עבור  $n = 1, 2, 3$ .

תכונה 1.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i && \text{הגדרת החיבור ב-}\mathbb{C} \\ &= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1) \cdot i && \text{קומוטטיביות החיבור ב-}\mathbb{R} \\ &= (a_2 + b_2 \cdot i) + (a_1 + b_1 \cdot i) && \text{הגדרת החיבור ב-}\mathbb{C} \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

תכונה 3.

$$\begin{aligned}
 z_1 + 0 &= (a_1 + b_1 \cdot i) + (0 + 0 \cdot i) \\
 &= (a_1 + 0) + (b_1 + 0) \cdot i && \text{הגדרת החיבור ב-}\mathbb{C} \\
 &= a_1 + b_1 \cdot i && \text{תכונת ה-}0 \text{ ב-}\mathbb{R} \\
 &= z_1
 \end{aligned}$$

תכונה 4. ניקח  $w := (-a_1) + (-b_1) \cdot i$  אז

$$\begin{aligned}
 z_1 + w &= (a_1 + b_1 \cdot i) + ((-a_1) + (-b_1) \cdot i) \\
 &= (a_1 + (-a_1)) + (b_1 + (-b_1)) \cdot i && \text{הגדרת החיבור ב-}\mathbb{C} \\
 &= 0 + 0 \cdot i && \text{תכונת ה-}0 \text{ ב-}\mathbb{R} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

התכונות 2, 5, 6, 7 ו-8 מוכחות באופן דומה.

תכונה 9. לצורך פשוטות נרשום  $z = (a, b) := z_1$ . מאחר ש- $z \neq 0$  הרי  $a^2 + b^2 > 0$  ובפרט  $a^2 + b^2 \neq 0$ . נגדיר

$$w := \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i \in \mathbb{C}$$

אז

$$\begin{aligned}
 z \cdot w &= (a + b \cdot i) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i \right) \\
 &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{-ab + ba}{a^2 + b^2} \cdot i = 1
 \end{aligned}$$

מש"ל.

נשים לב כי המספר  $w$  בתכונה 9 הוא יחיד, שהרי אם גם המספר  $v$  מקיים  $z_1 \cdot v = 1$  אז

$$w = 1 \cdot w = (z_1 \cdot v) \cdot w = v \cdot (z_1 \cdot w) = v \cdot 1 = v$$

בדומה מראים כי המספר  $w$  בתכונה 4 הוא יחיד.

הגדרה 4.

א. יהי  $z$  מספר מרוכב. ההפכי החיבורי של  $z$  הוא המספר  $w$  כך ש- $z + w = 0$ , והוא יסומן ע"י  $-z$ .

ב. יהי  $z$  מספר מרוכב שונה מ-0. ההפכי הכפלי של  $z$  הוא המספר  $w$  כך ש- $z \cdot w = 1$ , והוא יסומן ע"י  $\frac{1}{z}$  או  $z^{-1}$ .

דוגמה 1.

$$\begin{aligned}
 \text{א. ההפכי הכפלי של } 2 + i &\text{ הוא } \frac{2}{5} + \frac{-1}{5} \cdot i \\
 \text{ב. ההפכי הכפלי של } i &\text{ הוא } -i.
 \end{aligned}$$

כנהוג לעתים נשמיט את סימן הכפל, ונרשום  $z_1 z_2$  במקום  $z_1 \cdot z_2$ . בשל תכונות האסוציאטיביות מותר במקרים מסוימים להשמיט סוגריים, למשל

$$z_1 z_2 z_3 = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot z_2^{-1}$$

הגדרה 5.

א. הצמוד של המספר המרוכב  $z = a + bi$  הוא המספר המרוכב  $\bar{z} := a - bi$ .

ב. הערך המוחלט של  $z = a + bi$  הוא המספר הממשי  $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ .

נשים לב כי  $|z| \geq 0$ , וכן  $|z| = 0$  אם  $z = 0$ .

## טענה 2.

1.  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ .
2. אם  $z \neq 0$  הרי  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

הוכחה. 1. נרשום  $z = a + bi$  ואז

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + (-ab + ba)i = a^2 + b^2 \geq 0$$

עתה נוציא שורש ונקבל  $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$ .

2. יהי  $w := \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ . לפי חלק 1 ידוע כי  $z\bar{z} = |z|^2 > 0$ , ולכן

$$zw = z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z\bar{z} \cdot \frac{1}{z\bar{z}} = 1$$

## טענה 3. הנה כמה תכונות של הצמוד.

1.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .
2.  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ .
3.  $\overline{\bar{z}} = z$ .
4. אם  $z \in \mathbb{R}$  אז  $\bar{z} = z$ .
5. אם  $z = bi$  כאשר  $b \in \mathbb{R}$  אז  $\bar{z} = -z$ .

הוכחה חלקית. נוכיח את תכונה 2. נרשום  $z_n = a_n + b_n i$  עבור  $n = 1, 2$ . מקבלים

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)} \\ &= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot i} \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 &= (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (-a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot i \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot i \end{aligned}$$

ר

משי"ל.

לשם מה יש לנו צורך במספרים מרוכבים? נתבונן במשוואה

$$x^2 + 2 = 0$$

אין לה פתרון ב- $\mathbb{R}$ . אולם אם נעבור למשוואה השקולה  $x^2 = -2$  רואים שיש פתרונות מרוכבים  $x := \sqrt{2} \cdot i$  ו- $x := -\sqrt{2} \cdot i$ . בדומה קל לראות שלכל משוואה ריבועית

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

עם מקדמים ממשיים יש פתרונות מרוכבים

$$x := \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

למעשה קיים משפט כללי (אשר לא נוכיח בקורס שלנו):

**משפט 1 (המשפט היסודי של האלגברה).** בהנתן פולינום

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

ממעלה  $n \geq 1$  עם מקדמים מרוכבים  $a_0, \dots, a_{n-1}$  קיים למשוואה  $f(x) = 0$  פתרון מרוכב.

כדי לתת מושג על ההוכחה של המשפט נדון במקרה פרטי. נניח כי  $n$  מספר איזוגי וכל המקדמים  $a_i$  הם ממשיים. מקבלים הפונקציה רציפה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , והגבולות  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  ו- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  קיימים. משפט ערך הביניים אומר שישנה נקודה  $b \in \mathbb{R}$  כך ש- $f(b) = 0$ .

אנו נכליל את המושג "מספר". במקום מספרים נעבוד עם **סקלרים**, שהם איברים **שדה**. הפעולות חיבור, חיסור, כפל וחילוק תהיינה מוגדרות עבור סקלרים. היתרון במושג הכללי של שדה הוא שהתוצאות שנוכיח (למשל לגבי פתרון משוואות ליניאריות) ינוסחו עבור שדה כלשהו; וכך בבת אחת נקבל תוצאות התקפות הן עבור משוואות עם מקדמים מרוכבים, הן עבור משוואות עם מקדמים רציונליים, והן עבור כל שדה אחר שאנו עשויים להתקל בו.

**הגדרה 6.** שדה הינו מערכת  $(F, +, \cdot, 0, 1)$  שבה  $F$  קבוצה,  $+$  ו- $\cdot$  הן פעולות דו-מקומיות על  $F$ , ו- $0$  ו- $1$  הם שני איברים ב- $F$ . התכונות הבאות צריכות להתקיים לכל  $a, b, c \in F$ .

1. קומוטטיביות החיבור:  $a + b = b + a$ .
2. אסוציאטיביות החיבור:  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .
3. תכונת ה- $0$ :  $a + 0 = a$ .
4. הפכי חיבורי: קיים  $d$  ב- $F$  כך ש- $a + d = 0$ .
5. קומוטטיביות הכפל:  $a \cdot b = b \cdot a$ .
6. אסוציאטיביות הכפל:  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .
7. תכונת ה- $1$ :  $a \cdot 1 = a$ .
8. דיסטריבוטיביות:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .
9. הפכי כפלי: אם  $a \neq 0$  אז קיים  $d$  ב- $F$  כך ש- $a \cdot d = 1$ .
10.  $0 \neq 1$ .

גם בשדה כללי נשתמש במושגים הרגילות לגבי השמטת סוגריים וסימן הכפל. לרוב נאמר בקיצור "יהי  $F$  שדה" במקום "יהי  $(F, +, \cdot, 0, 1)$  שדה".

#### טענה 4.

1. ההפכי החיבורי יחיד.
2. ההפכי הכפלי יחיד.

**הוכחה.** א. יהי  $a \in F$  ונניח כי  $b_1$  ו- $b_2$  מקיימים  $a + b_1 = 0 = a + b_2$ . אז

$$\begin{aligned} b_2 &= b_2 + 0 && \text{תכונת ה-} 0 \\ &= b_2 + (a + b_1) && \text{נתון} \\ &= (b_2 + a) + b_1 && \text{אסוציאטיביות החיבור} \\ &= (a + b_2) + b_1 && \text{קומוטטיביות החיבור} \\ &= 0 + b_1 && \text{נתון} \\ &= b_1 + 0 && \text{קומוטטיביות החיבור} \\ &= b_1 && \text{תכונת ה-} 0 \end{aligned}$$

כלומר  $b_1 = b_2$ .

ב. נניח  $a \neq 0$  ו- $ab_1 = 1 = ab_2$ . בדומה למה שעשינו למעלה, אבל תוך שימוש בתכונת ה- $1$  במקום בתכונת ה- $0$ , מקבלים ש- $b_1 = b_2$ .

**דוגמה 2.** הקבוצות  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ו- $\mathbb{C}$  עם פעולות החשבון הרגילות הן שדות.

**דוגמה 3.** המערכת  $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$  איננה שדה. כדי להראות זאת די למצוא דוגמה נגדית לאחת התכונות. ניקח את המספר הטבעי 3. לא קיים ל-3 הפכי חיבורי. לכן תכונה 4 איננה מתקיימת.

**דוגמה 4.** המערכת  $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$  איננה שדה. דוגמה נגדית לתכונה 9: לא קיים הפכי כפלי למספר השלם 3.

**דוגמה 5.** ישנם גם שדות סופיים. לכל מספר ראשוני  $p$  ומספר שלם חיובי  $n$  ישנו שדה (יחיד)  $\mathbb{F}_{p^n}$  שבו  $p^n$  איברים. עבור  $n = 1$  המערכת  $\mathbb{F}_p$  קלה לתיאור. הקבוצה  $\mathbb{F}_p$  היא קבוצת הסימנים

$$\{[0], [1], [2], \dots, [p-1]\}.$$

פעולות החשבון מוגדרות כך. יהיו  $i$  ו- $j$  שני מספרים מבין  $0, 1, \dots, p-1$ . החיבור מוגדר ע"י

$$[i] + [j] := [k]$$

כאשר  $k$  היא השארית של  $i + j$  אחרי חלוקה ב- $p$ . הכפל מוגדר ע"י

$$[i] \cdot [j] := [l]$$

כאשר  $l$  היא השארית של  $i \cdot j$  אחרי חלוקה ב- $p$ . מסתבר שהמערכת  $(\mathbb{F}_p, +, \cdot, [0], [1])$  היא שדה. במקרה  $p = 3$  טבלאות החיבור והכפל נראות כך.

$+$	[0]	[1]	[2]	$\cdot$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[2]	[0]	[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[2]	[0]	[1]	[2]	[0]	[2]	[1]

אנו רואים שב- $\mathbb{F}_3$  מתקיים  $[2] \cdot [2] = [1]$ , ולכן  $[2]^{-1} = [2]$ . בדומה  $[2] + [1] = [0]$  ולכן  $-[2] = [1]$ .

**טענה 5.** יהי  $F$  שדה ו- $a, b$  איברים.

א.  $a \cdot 0 = 0$

ב.  $a \cdot (-1) = -a$

ג. אם  $ab = 0$  ו- $a \neq 0$  אז  $b = 0$ .



**הוכחה.** א.  $0 + 0 = 0$ , לכן בעזרת הדיסטריוטיביות נקבל

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

תכונת ההפכי החיבורי ותכונת האפס נותנות לנו

$$0 = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 + a \cdot 0 = 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$$

**ב.** תכונת האחד והדיסטריוטיביות נותנות

$$a + a \cdot (-1) = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a \cdot (1 + (-1))$$

על פי חלק א' ידוע ש-

$$a \cdot (1 + (-1)) = a \cdot 0 = 0$$

**ג.** נתון כי  $a \neq 0$ , ולכן קיים  $a^{-1}$ . בעזרת חלק א' מקבלים

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b$$

## ב. משוואות ליניאריות

בפרק זה אנו נעסוק במשוואות ליניאריות מעל שדה כלשהו  $F$ . בדוגמאות מספריות בדרך כלל השדה יהיה  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$  או  $\mathbb{Q}$ .

### דוגמה 1.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

הינה מערכת של שתי משוואות ליניאריות בשלושה נעלמים מעל השדה  $\mathbb{Q}$ .

**הגדרה 1.** מערכת של  $m$  משוואות ליניאריות ב- $n$  משתנים מעל השדה  $F$  היא מערכת משוואות מהצורה הבאה

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

כאן  $a_{11}, \dots, a_{mn}$  הינם סקלרים ב- $F$  שיקראו **המקדמים** של המערכת;  $x_1, \dots, x_n$  הם **המשתנים** (או **הנעלמים**) ו- $b_1, \dots, b_m$  הינם סקלרים ב- $F$  שיקראו **הקבועים**.

בדוגמה 1 המקדמים היו  $a_{11} = 2, a_{12} = -1$  וכו'; והקבועים היו  $b_1 = 9$  ו- $b_2 = 5$ .

**הגדרה 2.** פתרון של המערכת  $(*)$  הינו סדרת סקלרים  $(c_1, \dots, c_n)$  ב- $F$  כך שבהצבת  $x_1 := c_1, \dots, x_n := c_n$  במערכת המשוואות מתקיימים כל השוויונות:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

בדוגמה 1 אחד הפתרונות הוא

$$(c_1, c_2, c_3) = \left(\frac{32}{7}, \frac{1}{7}, 0\right)$$

נשאלות השאלות הבאות:

- האם תמיד קיים פתרון?
- האם הפתרון יחיד?
- כיצד נמצא את הפתרונות?
- מה מבנה קבוצת הפתרונות?

נסתכל בדוגמה נוספת. כאן השדה הוא  $F := \mathbb{R}$ .

$$(\#) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

במצב בו הקבועים כולם 0 קוראים למערכת המשוואות **מערכת הומוגנית**.

ניתן לגשת לפתרון המערכת הזו בצורה נאיבית. תחילה נחסר כפולה מתאימה של משוואה אחת מהשניה

$$\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -2(x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0) \\ \hline -7x_2 - 7x_3 = 0 \end{array}$$

וע"י פישוט ונקבל את המשוואה  $x_2 = -x_3$ . נציב זאת באחת המשוואות המקוריות ונקבל  $x_1 = -x_3$ . כעת רואים שהמערכת (##) שקולה למערכת המשוואות

$$(\#\#) \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

לכן כל פתרון הוא מהצורה  $(-c, -c, c)$  כאשר  $c$  סקלר כלשהו ב- $\mathbb{R}$ . קבוצת הפתרונות היא  $\{(-c, -c, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$ .

נסכם את מה שעשינו: באמצעות פעולות פשוטות על המשוואות קיבלנו מערכת משוואות חדשה, שקולה למערכת המשוואות המקורית, אשר אותה ניתן לפתור בהתבוננות. המטרה בשיעורים הקרובים היא ללמוד שיטה לפתרון משוואות אשר מבוססת על הרעיון הזה. תחילה נכניס סימנים יעילים יותר לכתיבת מערכת המשוואות. בהגדרה הבאה "מטריצה" היא מלה נרדפת ל"טבלה" ו"וקטור" היא מלה נרדפת ל"עמודה".

**הגדרה 3.** בהנתן מערכת משוואות (\*) כמו בהגדרה 1 נרשום את המקדמים ב"מטריצת המקדמים":

$$. A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

וקטור הנעלמים הוא  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ , ו"וקטור הקבועים" הוא  $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ . מערכת המשוואות (\*) תסומן בקיצור ע"י

$$. AX = B$$

מערכת הומוגנית תסומן ע"י  $AX = O$ , כאשר  $O$  הוא הוקטור  $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ .

בהמשך הקורס כאשר נלמד חשבון מטריצות הסימון  $AX = B$  יקבל משמעות נוספת.

בדרך כלל כאשר נרצה להתייחס למטריצה  $A$  בגודל  $m \times n$  שרכיביה הם  $a_{11}, \dots, a_{mm}$  נרשום  $A = [a_{ij}]$ , כאשר האינדקס  $i$  מציין את מספר השורה, והאינדקס  $j$  מציין את מספר העמודה. מטריצה תמיד תהיה בגודל חיובי, כלומר  $m, n \geq 1$ . עבור וקטור  $B$  שרכיביו הם  $b_1, \dots, b_m$  נרשום  $B = [b_i]$ .

**הגדרה 4.** תהי  $A = [a_{ij}]$  מטריצה בגודל  $m \times n$  עם רכיבים בשדה  $F$ . נסמן ב- $L_1, \dots, L_m$  את שורות

המטריצה, כלומר  $L_i = [a_{i1} \dots a_{in}]$  ו- $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$ . להלן שלושה סוגי פעולות על שורות המטריצה  $A$ , הנקראות פעולות שורה אלמנטריות.

1. "  $cL_i \rightarrow L_i$  " : כופלים את השורה  $L_i$  בסקלר  $c$ . כאן  $c \in F, c \neq 0$ .
2. "  $L_i + cL_j \rightarrow L_i$  " : לוקחים את השורה  $L_j$ , כופלים בסקלר  $c$  ומוסיפים את התוצאה לשורה  $L_i$ . השורה  $L_j$  נותרת ללא שינוי. כאן  $c \in F$  כלשהו ו-  $i \neq j$ .
3. "  $L_i \leftrightarrow L_j$  " : מחליפים את השורות  $L_i$  ו-  $L_j$ . כאן  $i \neq j$ .

**דוגמה 2.** ניקח את מערכת המשוואות (#) שבדוגמה 1. נרשום את מטריצת המקדמים  $A$  ונפעיל עליה סדרת פעולות שורה אלמנטריות.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-7}L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - 3L_2 \rightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

המטריצה האחרונה מייצגת את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

בהעברת המשתנה  $x_3$  לאגף ימין נקבל את מערכת המשוואות

$$(\#\#) \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

אשר אותה כזכור אנו יכולים לפתור בהתבוננות.

עבור השיטה הכללית נרצה לדעת כי פעולות שורה אלמנטריות אינן משנות את קבוצת הפתרונות של המערכת. בטענה הבאה  $A$  היא מטריצה,  $e$  היא פעולת שורות אלמנטרית ו-  $e(A)$  היא המטריצה המתקבלת כתוצאה מהפעלת  $e$  על  $A$ .

**טענה 1.** תהי  $e$  פעולת שורות אלמנטרית ו-  $A$  מטריצה. אז קיימת פעולת שורות אלמנטרית  $f$  כך ש-  $f(e(A)) = A$  ו-  $e(f(A)) = A$ .

**הוכחה.**

1. אם  $e$  היא "  $cL_i \rightarrow L_i$  " ניקח את  $f$  להיות "  $\frac{1}{c}L_i \rightarrow L_i$  ".
2. אם  $e$  היא "  $L_i + cL_j \rightarrow L_i$  " אז ניקח את  $f$  להיות "  $L_i - cL_j \rightarrow L_i$  ".
3. אם  $e$  היא "  $L_i \leftrightarrow L_j$  " אז  $f = e$ .

מש"ל.

**משפט 1.** תהי  $A$  מטריצה מגודל  $m \times n$  עם ערכים בשדה  $F$ . אם המטריצה  $A'$  מתקבלת מהמטריצה  $A$  ע"י הפעלת סדרה סופית של פעולות שורה אלמנטריות, הרי למערכות המשוואות ההומוגניות  $AX = O$  ו-  $A'X = O$  יש בדיוק אותם פתרונות.

**הוכחה.** תהיינה  $e_1, \dots, e_r$  פעולות שורה אלמנטריות כך שהפעלתן בזו אחר זו נותנת

$$A = A_0 \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 \xrightarrow{e_3} \dots \xrightarrow{e_r} A_r = A'$$

מספיק להוכיח כי לכל  $k$  בטווח  $1, \dots, r$  למערכות המשוואות  $A_k X = O$  ו-  $A_{k-1} X = O$  יש אותם פתרונות. לכן די להוכיח את המקרה  $r = 1$ , כלומר  $A' = e(A)$  לאיזו פעולת שורות אלמנטרית  $e$ . נרשום  $A = [a_{ij}]$ .

שלב א. תחילה נניח כי  $(d_1, \dots, d_n)$  פתרון של המערכת  $AX = O$ , ונראה כי זה גם פתרון של  $A'X = O$ . נבחין בין שלושה מקרים אפשריים.

1. הפעולה  $e$  היא " $L_i \rightarrow cL_i$ ". משוואה מס'  $i$  במערכת  $AX = O$  היא

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

נתון ש-  $(d_1, \dots, d_n)$  פתרון של  $AX = O$ , כלומר

$$a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \dots + a_{in}d_n = 0$$

ע"י כפל המשוואה ב-  $c$  נקבל

$$ca_{i1}d_1 + ca_{i2}d_2 + \dots + ca_{in}d_n = 0$$

לכן  $(d_1, \dots, d_n)$  פתרון של המשוואה

$$ca_{i1}x_1 + ca_{i2}x_2 + \dots + ca_{in}x_n = 0$$

שהיא משוואה מס'  $i$  במערכת  $A'X = O$ . יתר המשוואות הן ללא שינוי.

2. הפעולה  $e$  היא " $L_i + cL_j \rightarrow L_i$ ", כאשר  $i \neq j$ . נתון כי

$$a_{i1}d_1 + \dots + a_{in}d_n = 0$$

ן-

$$a_{j1}d_1 + \dots + a_{jn}d_n = 0$$

לכן

$$(a_{i1} + ca_{j1})d_1 + \dots + (a_{in} + ca_{jn})d_n = 0$$

כלומר  $(d_1, \dots, d_n)$  פתרון של המשוואה

$$(a_{i1} + ca_{j1})x_1 + \dots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = 0$$

שהי משוואה מס'  $i$  במערכת  $A'X = O$ . יתר המשוואות נותרות ללא שינוי.

3.  $e$  היא הפעולה " $L_i \leftrightarrow L_j$ " כאשר  $i \neq j$ . כאן המשוואות במערכת  $AX = O$  הן אותן משוואות כמו ב-  $A'X = O$ , רק בסדר אחר. לכן הסדרה  $(d_1, \dots, d_n)$  היא פתרון של  $A'X = O$ .

שלב ב. כעת נניח כי  $(d_1, \dots, d_n)$  פתרון של  $A'X = O$ . ע"פ טענה 1 ישנה פעולת שורות אלמנטריות  $f$  כך ש-  $A = f(A')$ . ההוכחה שבשלב א' (תוך חילוף תפקידים בין  $A$  ו-  $A'$ ) מראה כי הסדרה  $(d_1, \dots, d_n)$  היא פתרון גם של המערכת  $AX = O$ . מש"ל.

5. הגדרה. שתי מטריצות  $A$  ו-  $A'$  מאותו גודל עם רכיבים בשדה  $F$  תקראנה **שקולות שורה** אם ניתן לעבור מ-  $A$  ל-  $A'$  ע"י סדרה סופית של פעולות שורה אלמנטריות.

$$A = A_0 \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 \xrightarrow{e_3} \dots \xrightarrow{e_r} A_r = A'$$

## תהליך הדרוג

נתחיל בשתי דוגמאות שימחישו כיצד פעולות שורה אלמנטריות מפשטות את מערכת המשוואות.

דוגמה 3. ניקח את השדה  $F := \mathbb{Q}$  ואת מערכת המשוואות ההומוגנית

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

מטריצת המקדמים היא

$$. A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

נפעיל על  $A$  את הפעולות הבאות.

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} & \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} & \xrightarrow{L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ & & & & \xrightarrow{L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} & \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3 \rightarrow L_3} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \\ & & & & & & & & \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -9 & 3 & 4 \end{bmatrix} & \xrightarrow{L_3 + 9L_2 \rightarrow L_3} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2} \end{bmatrix} \\ & & & & & & & & & & & & & \xrightarrow{\frac{2}{15}L_3 \rightarrow L_3} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} & \xrightarrow{L_1 - 4L_2 \rightarrow L_1} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & \xrightarrow{L_1 + 2L_3 \rightarrow L_1} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} & \xrightarrow{L_2 - \frac{1}{2}L_3 \rightarrow L_2} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

מערכת המשוואות שמתאימה למטריצה האחרונה היא :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{17}{3}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{5}{3}x_4 = 0 \\ x_3 - \frac{11}{3}x_4 = 0 \end{cases}$$

אחרי העברת המשתנה  $x_4$  לאגף ימין נקבל מערכת שקולה

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{17}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{3}x_4 \\ x_3 = \frac{11}{3}x_4 \end{cases}$$

מייד רואים כי אין כל הגבלה על הערכים שמציבים במקום המשתנה "החופשי"  $x_4$ ; ואחרי שהצבנו  $x_4 := c$  המשתנים "התלויים"  $x_2, x_1$  ו-  $x_3$  חייבים לקבל את הערכים  $x_2 := \frac{5}{3}c, x_1 := -\frac{17}{3}c$  ו-  $x_3 := \frac{11}{3}c$ . לכן קבוצת הפתרונות היא

$$. \left\{ \left( -\frac{17}{3}c, \frac{5}{3}c, \frac{11}{3}c, c \right) \mid c \in \mathbb{Q} \right\}$$

**דוגמה 4.** כעת ניקח את השדה  $F := \mathbb{C}$  ואת מערכת המשוואות

$$\begin{cases} -x_1 + \mathbf{i}x_2 = 0 \\ -\mathbf{i}x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

מטריצת המקדמים היא

$$. A := \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

נפעיל על  $A$  סדרה של פעולות שורה אלמנטריות.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 3 \\ -1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + iL_1 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 + 2i \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 + L_1 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 + 2i \\ 0 & 2 + i \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3+2i} L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 + i \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 - (2+i)L_2 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

מערכת המשוואות שקבלנו  $A'X = O$  היא

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

הפתרון היחיד למערכת המשוואות הוא  $(0, 0)$ . פתרון זה נקרא **הפתרון הטריטיואלי**. תמיד קיים הפתרון הטריטיואלי למערכת משוואות הומוגנית.

אחרי שראינו כמה דוגמאות נתחיל בלימוד השיטה לפתרון מערכות של משוואות ליניאריות. כאשר  $m, n \geq 1$  אנו מדברים על מטריצה מגודל  $m \times n$  הכוונה היא תמיד ש-

**הגדרה 6.** מטריצה  $A$  מגודל  $m \times n$  מעל השדה  $F$  תקרא **מטריצה מדורגת** אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים.

א. בכל שורה שאיננה כולה 0 הרכיב הראשון השונה מ־0 הוא 1. רכיב זה נקרא ה־1 המוביל של השורה.

ב. השורות שכולן 0 מופיעות אחרי השורות שאינן כולן 0.

ג. יהי  $r$  מספר השורות ב־ $A$  שאינן כולן 0, ונניח שבשורה ה־ $i$  המוביל הוא במקום  $k_i$ . אז  $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ .

הנה תרשים של מטריצה מדורגת. הסימן \* מייצג סקלר כלשהו.

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow \\ 2 \rightarrow \\ \vdots \\ r \rightarrow \\ r+1 \rightarrow \\ \vdots \\ m \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & & k_1 & & k_2 & & k_r & & n \end{array}$$

**הגדרה 7.** מטריצה מגודל  $m \times n$  מעל השדה  $F$  תקרא **מטריצה מדורגת קנונית** אם היא מדורגת, ובנוסף מתקיים התנאי הבא.

ד. עבור כל  $i$  מ-1 עד  $r$  הרכיב היחיד בעמודה  $k_i$  השונה מ-0 נמצא בשורה  $i$ . (רכיב זה הוא כמובן ה-1 המוביל של שורה  $i$ .)

הנה תרשים של מטריצה מדורגת קאנונית.

$$\begin{array}{l}
 1 \rightarrow \\
 2 \rightarrow \\
 \vdots \\
 r \rightarrow \\
 r+1 \rightarrow \\
 \vdots \\
 m \rightarrow
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 1 & & k_1 & & k_2 & & k_r & & n
 \end{array}$$

ננסה לתת תיאור מילולי של ההגדרות האלו. במטריצה מדורגת בכל מלבן שהפינה העליונה-ימנית שלו היא איזה 1 מוביל כל יתר הרכיבים הם 0. במטריצה מדורגת קאנונית התנאי הנוסף הוא שבכל עמודה שיש בה 1 מוביל כל יתר הרכיבים הם 0.

**דוגמה 5.** השדה בדוגמה זו הוא  $\mathbb{Q}$ .

א. המטריצה  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  היא מדורגת קאנונית.

ב. המטריצה  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  היא מדורגת, אבל איננה מדורגת קאנונית.

ג. המטריצה  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  איננה מדורגת.

ד. המטריצה  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  איננה מדורגת.

ה. מטריצת היחידה מגודל  $n \times n$ , אשר נסמן ע"י  $I_{n \times n}$ , היא מדורגת קאנונית.

$$I_{n \times n} := \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 1
 \end{bmatrix}$$



1. מטריצת האפס מגודל  $m \times n$ , אשר נסמן ע"י  $O_{m \times n}$ , היא מדורגת קאנונית.

$$O_{m \times n} := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

במטריצה זו  $r = 0$  ואין אף 1 מוביל.

ראינו בדוגמאות 3 ו-4 כי את מערכת המשוואות ההומוגנית  $AX = O$  ניתן לפתור באמצעות הבאת מטריצת המקדמים  $A$  לצורה מדורגת קאנונית. זה נכון באופן כללי. תחילה נראה כי כל מטריצה ניתנת לדרוג.

**משפט 2 (אלגוריתם הדרוג של גאוס-ז'ורדן).** תהי  $A$  מטריצה מגודל  $m \times n$  מעל השדה  $F$ . אז ישנה מטריצה  $A'$  מדורגת קאנונית אשר הינה שקולת שורה ל- $A$ .

**הוכחה.** נוכיח את המשפט ע"י כך שנציג אלגוריתם לדרוג המטריצה  $A = [a_{ij}]$ . האלגוריתם הוא רקורסיבי; הרקורסיה היא על המספר  $m$ , שהוא מספר השורות במטריצה  $A$ . בסוף כל שלב באלגוריתם נקבל מטריצה חדשה שתהיה שקולת שורות למטריצה הקודמת, ונקרא למטריצה החדשה  $A$ . כאשר האלגוריתם מסתיים  $A$  היא מטריצה מדורגת קאנונית. בשלב הרקורסיבי (שלב 5) מפעילים את האלגוריתם על מטריצה מגודל  $(m-1) \times n$ , ולכן עומק הרקורסיה (כלומר מספר הפעמים שהאלגוריתם מופעל) הוא לכל היותר  $m$ .

שלב 1. אם  $A = O_{m \times n}$  אז היא כבר מדורגת קאנונית ואפשר לעצור.

שלב 2. יהי  $k_1$  מספר העמודה הראשונה (משמאל) שאינה כולה אפסים. אם  $a_{1,k_1} \neq 0$  נעבור לשלב הבא. אחרת יש  $i > 1$  כך ש- $a_{i,k_1} \neq 0$ . נבצע פעולת החלפת שורה  $L_i \leftrightarrow L_1$ , ונקרא למטריצה החדשה  $A$ .

שלב 3. כעת  $a_{1,k_1} \neq 0$ . נבצע את פעולת השורות  $L_1 \rightarrow \frac{1}{a_{1,k_1}} L_1$ . נקבל מטריצה  $A$  שבה השורה הראשונה היא

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

↑  
 $k_1$

שלב 4. לכל  $i$  מ-2 עד  $m$  נבצע את הפעולה  $L_i - a_{i,k_1} L_1 \rightarrow L_i$  (לאיפוס עמודה מס'  $k_1$  מתחת ל-1 המוביל). בסוף שלב זה המטריצה  $A$  נראית כך:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

↑  
 $k_1$

שלב 5. זה השלב הרקורסיבי. אם  $m = 1$  אז  $A = L_1$  היא מדורגת קאנונית ואפשר לעצור. אחרת ניקח את המטריצה

$$B := \begin{bmatrix} a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

שהיא המטריצה המתקבלת מ־ $A$  אחרי השמטת שורה מס' 1. זו מטריצה מגודל  $(m-1) \times n$ . נפעיל על  $B$  את אלגוריתם הדרוג, ונקרא לתוצאה המתקבלת  $B'$ .  $B'$  היא מטריצה מדורגת קאנונית שקולת שורה ל־ $B$ . נציב את  $B'$  במקום  $B$  בתוך המטריצה  $A$ , ונקרא לתוצאה  $A'$ . זאת אומרת ש־

$$A' = \begin{bmatrix} L_1 \\ B' \end{bmatrix}$$

מאחר שבמטריצה  $B$  היו רק אפסים בעמודות מ־1 עד  $k_1$ , ואפסים אלו נשארו במטריצה  $B'$ , הרי  $A'$  היא מטריצה מדורגת.

נשים לב כי את פעולות השורה אשר נעשו במהלך המעבר מהמטריצה  $B$  ל־ $B'$  ניתן לראות גם כפעולות שורה המעבירות מ־ $A$  ל־ $A'$ . כל ההבדל הוא שינוי מיספור השורות (שורה  $i$  ב־ $B$  היא שורה  $i+1$  ב־ $A$ ). משום כך  $A'$  היא שקולת שורה ל־ $A$ . לסיום שלב זה נגדיר  $A := A'$ .

שלב 6. נותר לאפס את הערכים בשורה 1 הנמצאים מעל 1־ים מובילים. נניח כי במטריצה המדורגת  $A$  יש  $r$  שורות שאינן כולן 0, ובשורה  $L_i$  ה־1 המוביל הוא במקום  $k_i$ . לכל  $i$  מ־2 עד  $m$  נבצע את פעולת השורה  $L_1 - a_{1,k_i} L_i \rightarrow L_1$  לקבלת מטריצה מדורגת קאנונית. מש״ל.

**הגדרה 8.** תהי  $A'$  מטריצה מדורגת קאנונית עם ערכים בשדה  $F$ . מספר השורות שאינן כולן 0 ב־ $A'$ , אשר מסומן בדרך כלל באות  $r$ , נקרא **הדרגה** של  $A'$ .

**הערה.** תהי  $A$  מטריצה כלשהי ותהי  $A'$  ו־ $A''$  מטריצות מדורגות קאנוניות ושקולות־שורה ל־ $A$ . ניתן להוכיח כי  $A' = A''$ ; אולם אנו לא נזדקק לכך.

### פתרון מערכת משוואות הומוגנית

**הגדרה 9.** תהי  $A'$  מטריצה מדורגת קאנונית בגודל  $m \times n$  ומדרגה  $r$ . נניח כי בשורה  $L_i$  ה־1 המוביל הוא במקום  $k_i$ . המשתנים  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$  נקראים **המשתנים התלויים** במערכת המשוואות  $A'X = O$ . יתר המשתנים נקראים **המשתנים החופשיים**, והם יסומנו כך:  $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_{n-r}}$ .

**דוגמה 6.** ניקח  $\mathbb{R} := F$  ו־

$$A' := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

הדרגה היא  $r = 2$ . העמודות שבהן יש 1־ים מובילים הן  $k_1 := 2$  ו־ $k_2 := 4$ . המשתנים התלויים הם  $x_2$  ו־ $x_4$ . המשתנים החופשיים הם  $x_3, x_1$  ו־ $x_5$ . מערכת המשוואות  $A'X = O$  היא

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + \frac{1}{2}x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

אחרי העברת המשתנים החופשיים לאגף ימין מקבלים

$$\begin{cases} x_2 = -(-3x_3 + \frac{1}{2}x_5) \\ x_4 = -(2x_5) \end{cases}$$

רואים שקבוצת הפתרונות היא

$$\{(c, 3d - \frac{1}{2}e, d, -2e, e) \mid c, d, e \in \mathbb{R}\}$$

בניסוח המשפט הבא נזדקק למושג של תבנית ליניארית הומוגנית ב־ $n$  משתנים עם מקדמים ב־ $F$ . זה ביטוי מהצורה

$$f(x_1, \dots, x_n) = d_1 x_1 + \dots + d_n x_n$$

כאשר  $d_1, \dots, d_n \in F$ . בהנתן סדרת סקלרים  $(c_1, \dots, c_n)$  ניתן להציב  $x_i := c_i$  ולקבל ערך  $f(c_1, \dots, c_n) := d_1 c_1 + \dots + d_n c_n \in F$ .

**משפט 3.** תהי  $A$  מטריצה בגודל  $m \times n$  עם ערכים בשדה  $F$  ותהי  $A'$  מטריצה מדורגת קאנונית שקולת שורה ל־ $A$ . יהיו  $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$  המשתנים התלויים במערכת המשוואות  $A'X = O$  ויהיו  $x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}$  המשתנים החופשיים. אז קיימות תבניות ליניאריות הומוגניות  $f_i(x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}})$  עם מקדמים ב־ $F$ , כך שהפתרונות למערכת המשוואות  $AX = O$  הם כולם מהצורה:

$$\begin{cases} x_{l_1} := c_1 \\ \vdots \\ x_{l_{n-r}} := c_{n-r} \\ x_{k_1} := f_1(c_1, \dots, c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_{k_r} := f_r(c_1, \dots, c_{n-r}) \end{cases}$$

כאשר  $c_1, \dots, c_{n-r}$  הם סקלרים כלשהם ב־ $F$ .

**הוכחה.** ע"פ משפט 1 למערכות המשוואות  $AX = O$  ו־ $A'X = O$  יש בדיוק אותם פתרונות. אנו נמצא את הפתרונות למערכת המשוואות השנייה. נסמן  $A' = [a'_{ij}]$ . מערכת המשוואות  $A'X = O$  נראית כך. אם  $i \leq r$  אז משוואה מס'  $i$  היא

$$a'_{i,1} x_1 + \dots + a'_{i,n} x_n = 0$$

כאשר  $a'_{i,k_i} = 1$  (זהו ה־1 המוביל של שורה 1) והמקדמים של יתר המשתנים התלויים הם כולם 0. נעביר את המשתנים החופשיים לאגף ימין ונקבל משוואה שקולה

$$x_{k_i} = \sum_{j=1}^{n-r} -a'_{i,l_j} x_{l_j}$$

נגדיר תבנית ליניארית הומוגנית

$$f_i(x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}) := \sum_{j=1}^{n-r} -a'_{i,l_j} x_{l_j}$$

מאחר שהמשוואות מס'  $r+1, \dots, m$  הן  $0 = 0$  הרי ניתן להתעלם מהן, ולכן המערכת  $A'X = O$  שקולה למערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_{k_1} = f_1(x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}) \\ \vdots \\ x_{k_r} = f_r(x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}) \end{cases}$$

רואים שאין מגבלה כלשהי על הצבת ערכים  $x_{l_j} := c_j$  במשתנים החופשיים, וכל הצבה כזו  $(c_1, \dots, c_{n-r})$  מגדירה בדיוק פתרון אחד אשר בו  $x_{k_i} := f_i(c_1, \dots, c_{n-r})$ . מש"ל.

## פתרון מערכת משוואות לא הומוגנית

נחזור למקרה של מערכת משוואות לא הומוגנית  $AX = B$ . תחילה נשים לב שלא תמיד יש פתרון למערכת כזו.

**דוגמה 7.** ניקח את השדה  $F := \mathbb{Q}$  ואת מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

למערכת זו אין אף פתרון!

למערכת המשוואות הלא הומוגנית  $AX = B$  מתאימה מערכת משוואות הומוגנית  $AX = O$ , ויש קשר הדוק בין הפתרונות שלהן, כפי שהמשפט הבא מראה.

**משפט 4.** תהי  $AX = B$  מערכת משוואות לא הומוגנית עם  $m$  משוואות ו- $n$  נעלמים, ונניח כי  $(d_1, \dots, d_n)$  פתרון של מערכת משוואות זו. תהי  $(c_1, \dots, c_n)$  יה כלשהי של סקלרים. אז  $(c_1, \dots, c_n)$  פתרון של מערכת המשוואות ההומוגנית  $AX = O$  אם ורק אם  $(c_1 + d_1, \dots, c_n + d_n)$  פתרון של מערכת המשוואות  $AX = B$ .

**הוכחה.** נסתכל על משוואה מס'  $i$ . נתון כי

$$a_{i1}d_1 + \dots + a_{in}d_n = b_i$$

אם  $(c_1, \dots, c_n)$  פתרון של המערכת ההומוגנית הרי

$$a_{i1}c_1 + \dots + a_{in}c_n = 0$$

נחבר את המשוואות ונקבל

$$a_{i1}(c_1 + d_1) + \dots + a_{in}(c_n + d_n) = b_i + 0 = b_i$$

כלומר  $(c_1 + d_1, \dots, c_n + d_n)$  פתרון של משוואה מס'  $i$  במערכת המשוואות  $AX = B$ . מכיוון שהפוך ההוכחה היא ע"י חיסור המשוואות.

מש"ל.

אנו רואים שהעניין העיקרי בפתרון מערכת משוואות לא הומוגנית  $AX = B$  הוא למצוא פתרון מסוים שלה. שאר הפתרונות הם סכומים של פתרון מסוים זה והפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**הגדרה 10.** תהי  $AX = B$  מערכת של  $m$  משוואות ב- $n$  משתנים. **המטריצה המורחבת** של מערכת המשוואות  $AX = B$  היא המטריצה מגודל  $m \times (n + 1)$

$$[A|B] := \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

הקו האנכי אמור להזכיר לנו שזו מטריצה מורחבת. פעולות השורה האלמנטריות פועלות כמו בן גם המטריצה המורחבת, ואם  $[A'|B']$  מתקבלת מ- $[A|B]$  ע"י פעולות שורה הרי יש מערכת משוואות לא הומוגנית מתאימה  $A'X = B'$ .

**משפט 5.** אם המטריצות המורחבות  $[A|B]$  ו- $[A'|B']$  הן שקולות-שורה אז למערכות המשוואות  $AX = B$  ו- $A'X = B'$  יש אותם פתרונות.

**הוכחה.** כמו בהוכחה של משפט 1 די להוכיח את המקרה שבו  $e([A|B]) = e([A'|B'])$  כאשר  $e$  פעולת שורות אלמנטריות.

שלב א. תחילה נניח כי  $(d_1, \dots, d_n)$  פתרון של המערכת  $AX = B$ , ונראה כי זה גם פתרון של  $A'X = B'$ . נבחין בין שלושה מקרים אפשריים.

1. הפעולה  $e$  היא " $cL_i \rightarrow L_i$ ". משוואה מס'  $i$  במערכת  $AX = B$  היא

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

נתון ש-  $(d_1, \dots, d_n)$  פתרון של  $AX = B$ , כלומר

$$a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \dots + a_{in}d_n = b_i$$

ע"י כפל המשוואה ב-  $c$  נקבל

$$ca_{i1}d_1 + ca_{i2}d_2 + \dots + ca_{in}d_n = cb_i$$

לכן  $(d_1, \dots, d_n)$  פתרון של המשוואה

$$ca_{i1}x_1 + ca_{i2}x_2 + \dots + ca_{in}x_n = cb_i$$

שהיא משוואה מס'  $i$  במערכת  $A'X = B'$ . יתר המשוואות הן ללא שינוי. וכך הלאה כמו במקרה ההומוגני (משפט 1) עוברים על שני סוגי הפעולות האלמנטריות הנוספים, ואח"כ בשלב ב' משתמשים בפעולת השורות  $f$  ההפכית ל-  $e$ . מש"ל.

**דוגמה 8.** השדה הוא  $F := \mathbb{Q}$  ומערכת המשוואות היא

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

נבצע דירוג של  $[A|B]$ .

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A'|B'] \end{aligned}$$

מערכת המשוואות החדשה  $A'X = B'$  היא

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{1}{5}x_3 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

ואין לה אף פתרון.

**דוגמה 9.** נשנה את המשוואה השלישית במערכת המשוואות בדוגמה הקודמת ל-  $5x_2 - x_3 = 0$  ונקבל:

$$\begin{aligned}
 [A|B] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right] \\
 &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A'|B']
 \end{aligned}$$

מערכת המשוואות  $A'X = B'$  היא

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{1}{5}x_3 = 0 \end{cases}$$

ע"י העברת המשתנה החופשי לאגף ימין נקבל

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{3}{5}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{5}x_3 \end{cases}$$

קבוצת הפתרונות היא הקבוצה האינסופית

$$\cdot \left\{ \left( 1 - \frac{3}{5}c, \frac{1}{5}c, c \right) \mid c \in \mathbb{Q} \right\}$$

נשים לב כי אם המטריצה  $[A'|B']$  מדורגת קאנונית אז גם  $A'$  מדורגת קאנונית (השמטת עמודות מצד ימין של המטריצה לא מקלקלת תכונה זו).

**משפט 6.** תהי  $[A|B]$  המטריצה המורחבת של מערכת המשוואות  $AX = B$  ותהי  $[A'|B']$  מטריצה מדורגת קאנונית שקולת-שורה ל-  $[A|B]$ . התנאים הבאים שקולים.

- הדרגה של  $[A'|B']$  שווה לדרגה של  $A'$ .
- קיים פתרון למערכת המשוואות  $AX = B$ .

**הוכחה.** תחילה נוכיח כי אם תנאי א' איננו מתקיים אז גם תנאי ב' איננו מתקיים. נניח שהדרגה של  $[A'|B']$  גדולה מזו של  $A'$ . אז בהכרח יש 1 מוביל בעמודה  $B'$ . לכן השורה האחרונה השונה מ- 0 במטריצה  $[A'|B']$  היא  $[0 \cdots 0 | 1]$ . שורה זו מתאימה למשוואה

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = 1$$

אשר אין לה פתרון. לכן למערכת המשוואות  $A'X = B'$  אין פתרון. ע"פ משפט 5 למערכת המשוואות  $AX = B$  אין פתרון.

כעת נוכיח שקיים תנאי א' גורר קיום תנאי ב'. אם הדרגות של  $[A'|B']$  ו-  $A'$  שוות אז כל ה- 1 המוביל-ים במטריצה  $[A'|B']$  הם בהכרח במטריצה  $A'$ . נניח שהדרגה היא  $r$ . יהיו  $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$  המשתנים

התלויים של המערכת  $A'X = O$ , ויהיו  $x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}$  המשתנים החופשיים. יהיו  $b'_1, \dots, b'_m$  הקבועים המופיעים בעמודה  $B'$ . אז מערכת המשוואות  $A'X = B'$  היא

$$\begin{cases} x_{k_1} - f_1(x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}) = b'_1 \\ \vdots \\ x_{k_r} - f_r(x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}) = b'_r \end{cases}$$

כאשר  $f_i(x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}})$  הן התבניות הליניאריות ההומוגניות שהופיעו במשפט 3. (השמטנו את  $m-r$  המשוואות האחרונות שכולן  $0 = 0$ ). בתור פתרון ל-  $A'X = B'$ , ולכן גם ל-  $AX = B$ , ניתן לבחור את ההצבה

$$\begin{cases} x_{l_1} := 0 \\ \vdots \\ x_{l_{n-r}} := 0 \\ x_{k_1} := b'_1 \\ \vdots \\ x_{k_r} := b'_r \end{cases}$$

מש"ל.

## ג. מרחבים וקטוריים

במהלך הפרק  $F$  הינו שדה כלשהו (בדוגמאות  $F$  יהיה  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  או  $\mathbb{C}$ ). נתחיל באזכור כמה מושגים לגבי קבוצות. תהי  $V$  קבוצה ויהי  $n$  מספר טבעי.  $n$  יהי של איברים  $(v_1, \dots, v_n)$  היא סדרה של איברים  $V$ . חשוב לזכור שבסדרה סדר האיברים משמעותי; כלומר שתי  $n$  יות  $(v_1, \dots, v_n)$  ו-  $(w_1, \dots, w_n)$  הן שוות אם  $v_i = w_i$  לכל  $i$ . בכך הסדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  נבדלת מהקבוצה  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

בהנתן קבוצות  $V_1, \dots, V_n$  המכפלה הקרטזית שלהן היא הקבוצה

$$V_1 \times \dots \times V_n := \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_i \in V_i\}$$

כאשר  $V_1 = \dots = V_n = V$  כותבים בקיצור

$$V^n := \underbrace{V \times \dots \times V}_n$$

**דוגמה 1.** פעולת החיבור בשדה היא פונקציה  $F^2 \rightarrow F$  המתאימה לזוג הסדור  $(a, b) \in F^2$  את האיבר  $a + b \in F$ . מקובל לכתוב זאת כך:  $(a, b) \mapsto a + b$ .

**הגדרה 1.** מרחב וקטורי מעל השדה  $F$  הינו מערכת  $(V, +, \cdot, \vec{0})$  שבה  $V$  קבוצה שאיבריה נקראים וקטורים;  $+$  היא פעולה דו-מקומית

$$V \times V \rightarrow V, \quad (v, w) \mapsto v + w$$

הנקראת חיבור;  $\cdot$  היא פעולה דו-מקומית

$$F \times V \rightarrow V, \quad (a, v) \mapsto a \cdot v$$

הנקראת כפל בסקלר; ו-  $\vec{0}$  הוא איבר מיוחד ב-  $V$  הנקרא וקטור האפס. התכונות הבאות חייבות להתקיים לכל  $u, v, w \in V$  ו-  $a, b \in F$ .

1. קומוטטיביות החיבור:  $u + v = v + u$ .
2. אסוציאטיביות החיבור:  $(u + v) + w = u + (v + w)$ .
3. תכונת האפס:  $v + \vec{0} = v$ .
4. הפכי חיבורי: קיים  $z \in V$  כך ש-  $v + z = \vec{0}$ .
5. תכונת האחד:  $1 \cdot v = v$ .
6. אסוציאטיביות הכפל בסקלר:  $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$ .
7. דיסטריבוטיביות מימין:  $a \cdot (v + w) = (a \cdot v) + (a \cdot w)$ .
8. דיסטריבוטיביות משמאל:  $(a + b) \cdot v = (a \cdot v) + (b \cdot v)$ .

**דוגמה 2.** יהי  $n$  מספר שלם חיובי. מרחב ה-  $n$  יות הוא הקבוצה

$$F^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in F\}$$

עם פעולת החיבור

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

עם פעולת הכפל בסקלר

$$a \cdot (b_1, \dots, b_n) := (a \cdot b_1, \dots, a \cdot b_n)$$

ועם איבר האפס

$$\vec{0} := (0, \dots, 0)$$



נבדוק את קיום כמה מן התכונות. ניקח את תכונה מס' 1 (קומוטיביות החיבור).

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) && \text{הגדרת החיבור} \\ &= (b_1 + a_1, \dots, b_n + a_n) && \text{קומוטיביות החיבור ב-} F \\ &= (b_1, \dots, b_n) + (a_1, \dots, a_n) && \text{הגדרת החיבור} \end{aligned}$$

נבדוק את קיום תכונה 3 (תכונת האפס).

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) + (0, \dots, 0) &= (a_1 + 0, \dots, a_n + 0) && \text{הגדרת החיבור} \\ &= (a_1, \dots, a_n) && \text{תכונת האפס ב-} F \end{aligned}$$

בצורה דומה רואים שכל יתר התכונות של מרחב וקטורי מתקיימות עבור המערכת  $(F^n, +, \cdot, \vec{0})$ , בשל קיום התכונות המקבילות בשדה  $F$ . לבסוף נציין שגם עבור  $n = 0$  המרחב  $F^0$  מוגדר. הקבוצה  $F^0$  מכילה (ע"פ הגדרה) איבר יחיד, שהוא וקטור האפס  $\vec{0}$ . הפעולות הן כמובן  $\vec{0} + \vec{0} := \vec{0}$  ו-  $a \cdot \vec{0} := \vec{0}$ . כל תכונות המרחב הוקטורי מתקיימות גם במקרה זה.

**דוגמה 3.** יהיו  $m$  ו-  $n$  שני מספרים שלמים חיוביים. נסמן ב-  $M_{m \times n}(F)$  את קבוצת המטריצות מגודל  $m \times n$  מעל  $F$ , כלומר המטריצות עם רכיבים ב-  $F$ . הפעולות מוגדרות כך.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

ו-

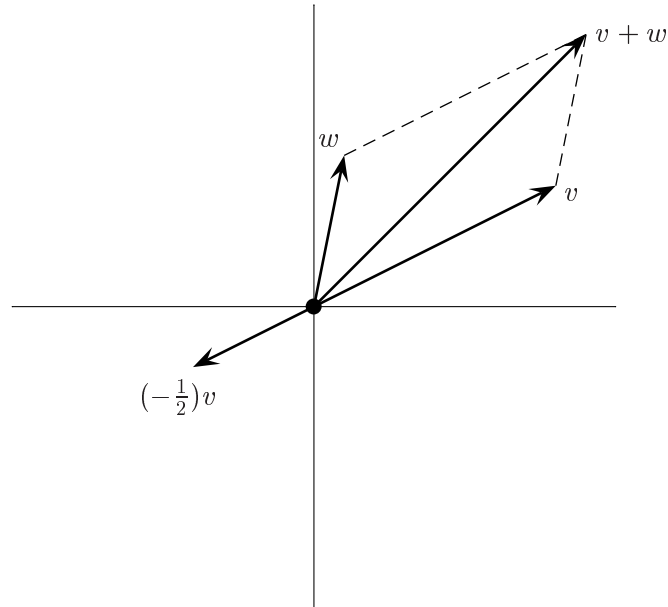
$$a \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ab_{11} & \cdots & ab_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ab_{m1} & \cdots & ab_{mn} \end{bmatrix}$$

איבר האפס הוא

$$\vec{0} := O_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

בדומה לבדיקה שעשינו בדוגמה 2 רואים שגם כאן מתקיימות כל התכונות של מרחב וקטורי. בעצם אם ניקח מטריצה  $A \in M_{m \times n}(F)$  ונסדר את שורותיה זו אחר זו נקבל שורה אחת באורך  $mn$ , כלומר איבר ב-  $F^{mn}$ . רואים בקלות שפעולות החיבור והכפל בסקלר ב-  $M_{m \times n}(F)$  מתאימות לפעולות החיבור והכפל בסקלר במרחב  $F^{mn}$ , ואיברי האפס מתאימים בשני המרחבים. לכן כמרחבים וקטוריים אין הבדל של ממש בין  $M_{m \times n}(F)$  ו-  $F^{mn}$ ; ההבדל היחיד הוא צורת כתיבת האיברים.

**דוגמה 4.** ניקח את השדה  $F := \mathbb{R}$  ואת מרחב הזוגות  $V = \mathbb{R}^2$ . למרחב  $\mathbb{R}^2$  יש פירוש הגיאומטרי: זהו המישור הממשי. פעולת החיבור היא ע"י כלל המקבילית, וכפל בסקלר הוא מתיחה. (ראה ציור).



**טענה 1.** ההפכי החיבורי הוא יחיד.

**הוכחה.** בהנתן וקטור  $v \in V$  נניח שהוקטורים  $w_1, w_2 \in V$  מקיימים

$$v + w_1 = v + w_2 = \vec{0}$$

אז

$$w_1 + (v + w_2) = w_1 + \vec{0} = w_1$$

וגם

$$w_1 + (v + w_2) = (w_1 + v) + w_2 = (v + w_1) + w_2 = \vec{0} + w_2 = w_2 + \vec{0} = w_2$$

מש"ל.

רואים ש- $w_1 = w_2$ .

**טענה 2.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $F$ .

א. לכל  $v \in V$  מתקיים  $0 \cdot v = \vec{0}$ .

ב. לכל  $a \in F$  מתקיים  $a \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .

ג. יהיו  $v \in V$  ו- $a \in F$  ו- $a \neq 0$  אז  $a \cdot v = \vec{0}$  אם ורק אם  $v = \vec{0}$ .

ד. לכל  $v \in V$  ו- $a \in F$  מתקיים  $-(a \cdot v) = (-a) \cdot v$ .

**הוכחה.** א.  $0 + 0 = 0$  בשדה, לכן

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = (0 \cdot v) + (0 \cdot v)$$

ע"י חיבור  $-(0 \cdot v)$  לשני האגפים נקבל

$$\vec{0} = 0 \cdot v + (-(0 \cdot v)) = (0 \cdot v) + (0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) = 0 \cdot v$$

ב. מתכונת האפס נובע  $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ . מדיסטריוטיביות מימין מקבלים

$$a \cdot \vec{0} = a \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = (a \cdot \vec{0}) + (a \cdot \vec{0})$$

כעת נוסיף  $-(a \cdot \vec{0})$  לשני האגפים במשוואה ונקבל

$$\vec{0} = (a \cdot \vec{0}) + (-(a \cdot \vec{0})) = (a \cdot \vec{0}) + (a \cdot \vec{0}) + (-(a \cdot \vec{0})) = a \cdot \vec{0}$$

ג. מאחר ש-  $a \neq 0$  קיים  $a^{-1} \in F$ .

$$\begin{aligned} \vec{0} &= a^{-1} \cdot \vec{0} && \text{מחלק ב'} \\ &= a^{-1} \cdot (a \cdot v) && \text{נתון} \\ &= (a^{-1} \cdot a) \cdot v && \text{אסוציאטיביות} \\ &= 1 \cdot v && \text{הגדרת } a^{-1} \\ &= v && \text{תכונת ה-1} \end{aligned}$$

ד. נעשה את החישוב הבא:

$$\begin{aligned} (a \cdot v) + ((-a) \cdot v) &= (a + (-a)) \cdot v && \text{דיסטריוטיביות משמאל} \\ &= 0 \cdot v && \text{הגדרת } -a \\ &= \vec{0} && \text{חלק א'} \end{aligned}$$

מש"ל.

$$(-a) \cdot v = -(a \cdot v)$$

כמו בפעולות חשבון בין סקלרים, גם במקרה של וקטורים נהוג לקצר. לדוגמה כותבים  $av$  במקום  $a \cdot v$ , וכן משמיטים סוגריים היכן שניתן.

**הגדרה 2.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $F$ . תת-קבוצה  $W$  של  $V$  תקרא **תת-מרחב** אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים.

א.  $\vec{0} \in W$

ב. לכל  $v, w \in W$  מתקיים  $v + w \in W$

ג. לכל  $v \in W$  ו-  $a \in F$  מתקיים  $a \cdot v \in W$ .

**טענה 3.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $F$  ו-  $W \subset V$  תת-מרחב. אז  $W$ , עם הפעולות של  $V$ , מהווה מרחב וקטורי.

**הוכחה.** נשים לב תחילה שב-  $W$  ישנו האיבר  $\vec{0}$  ושהפעולות  $+$  ו-  $\cdot$  מוגדרות על  $W$ . כל התכונות בהגדרה 1 מתקיימות באופן אוטומטי עבור המערכת  $(W, +, \cdot, \vec{0})$ , מלבד תכונה 4 אותה יש צורך להוכיח. יהי  $w \in W$  וקטור כלשהו. עלינו להוכיח כי  $-w \in W$ . אולם זה נובע מחלק ד' של טענה 2, שהרי

$$-w = -(1 \cdot w) = (-1) \cdot w \in W$$

מש"ל.

**דוגמה 5.** ניקח  $V := \mathbb{Q}^2, F := \mathbb{Q}$  ו-

$$W := \{(0, a) \mid a \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q}^2$$

זהו תת־מרחב.

**דוגמה 6.** ניקח  $V := \mathbb{R}^2, F := \mathbb{R}$  ו-

$$W := \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}\} \subset V$$

האם  $W$  תת־מרחב של  $V$ ? נבדוק.

א.  $\vec{0} = (0, 0) \in W$ ; בסדר.

ב.  $W$  סגור תחת חיבור; בסדר.

ג. ניקח  $a := \sqrt{2} \in \mathbb{R}$  ו-  $v := (1, 0) \in W$  אז  $a \cdot v = (\sqrt{2}, 0) \notin W$ . תכונה ג' איננה מתקיימת.

אם כן  $W$  איננו תת־מרחב של  $V$ .

**דוגמה 7.** כאן  $F := \mathbb{R}$  ו-  $V := \mathbb{R}^2$ . הנה כמה סוגי תת־מרחבים: הראשית  $\{(0, 0)\}$ ; ישר דרך הראשית; המישור כולו. בהמשך נוכיח שאלו כל האפשרויות.

**דוגמה 8.** שוב  $F := \mathbb{R}$  ו-  $V := \mathbb{R}^2$ . הקבוצות הבאות אינן תת־מרחבים של  $V$ :

$$W := \{(a, b) \mid a^2 + b^2 \leq 1\}$$

$$W := \{(a, b) \mid b \leq a\}$$

**טענה 4.** נתונה מערכת משוואות הומוגנית  $AX = O$  ב-  $n$  משתנים עם מקדמים בשדה  $F$ . ניקח  $V := F^n$  ו-

$$W := \{AX = O\} \subset F^n$$

אז  $W$  תת־מרחב של  $V$ .

**הוכחה.** א.  $\vec{0} \in W$ . זהו הפתרון הטריטיויאלי.

ב. יהיו  $(c_1, \dots, c_n)$  ו-  $(d_1, \dots, d_n)$  שני פתרונות. כלומר לכל משוואה  $i$  מתקיים

$$a_{i1}c_1 + \dots + a_{in}c_n = 0$$

ו-

$$a_{i1}d_1 + \dots + a_{in}d_n = 0$$

נחבר את המשוואות ונקבל

$$a_{i1}(c_1 + d_1) + \dots + a_{in}(c_n + d_n) = 0 + 0 = 0$$

לכן גם  $(c_1 + d_1, \dots, c_n + d_n)$  פתרון.

ג. יהי  $(c_1, \dots, c_n)$  פתרון ויהי  $d$  סקלר. ע"י כפל משוואה מס'  $i$  ב-  $d$  מקבלים

$$a_{i1}dc_1 + \dots + a_{in}dc_n = d \cdot 0 = 0$$

ולכן גם  $(dc_1, \dots, dc_n)$  הוא פתרון.

מש"ל.

**הגדרה 3.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $F$  ויהיו  $v_1, \dots, v_n \in V$ . **צרוף ליניארי** (או קומבינציה ליניארית) של הוקטורים  $v_1, \dots, v_n$  הוא וקטור  $v$  מהצורה

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

עבור  $a_1, \dots, a_n \in F$  כלשהם.

**הגדרה 4.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $F$  ותהי  $S$  תת־קבוצה של  $V$ . **מרחב הפרישה** של  $S$  היא הקבוצה

$$\text{Sp}(S) := \{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \mid m \geq 0; v_1, \dots, v_m \in S; a_1, \dots, a_m \in F\}$$

במקרה של  $m = 0$  ע"פ הגדרה הסכום  $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$  הוא הוקטור  $\vec{0}$ .

אין מניעה שבסדרה  $v_1, \dots, v_m$  תהיינה חזרות. דרך שקולה להגדיר את  $\text{Sp}(S)$  תוך שימוש בהגדרה 3 היא

$$\text{Sp}(S) := \{S \text{ הצירופים הליניאריים של סדרות סופיות של איברי } S\}$$

אם  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  נרשום לרוב בקיצור

$$\text{Sp}(v_1, \dots, v_m) := \text{Sp}(\{v_1, \dots, v_m\})$$

**טענה 5.** יהי  $V$  מרחב וקטורי ו-  $V \supset S$  תת־קבוצה. אז  $\text{Sp}(S)$  הוא תת־מרחב של  $V$ .

**הוכחה.** נעבור על שלושת התכונות מהגדרה 2.

א.  $\vec{0} \in \text{Sp}(S)$  ע"פ הגדרה (לוקחים  $m = 0$  בהגדרה 4).

ב. יהיו  $v, w \in \text{Sp}(S)$ . אז יש

$$v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in S$$

וְ

$$a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in F$$

כך ש־

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

וְ

$$w = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$$

הסכום הוא

$$v + w = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$$

ולכן זה איבר של  $\text{Sp}(S)$ .

ג. יהיו  $v \in \text{Sp}(S)$  ו-  $c \in F$ . נרשום את  $v$  כצרוף ליניארי של אברי  $S$  כמו בפסקה הקודמת. מקבלים ש־

$$cv = (ca_1)v_1 + \dots + (ca_m)v_m$$

מש"ל.

שייך ל־  $\text{Sp}(S)$ .

**דוגמה 9.** נתבונן במרחב  $V := F^2$  ובקבוצה  $S := \{(1, 1)\}$ . יהיו  $v_1, \dots, v_n \in S$ . אז  $v_i = (1, 1)$  ולכן לכל  $n$  יהיה של סקלרים  $(a_1, \dots, a_n)$  מקבלים

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = (a_1 + \dots + a_n) \cdot (1, 1) = (a, a)$$

כאשר  $a := a_1 + \dots + a_n$  ז"א

$$\text{Sp}(S) = \{(a, a) \mid a \in F\}$$

**דוגמה 10.** כאן  $V = F^3$  ו-

$$S := \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

ז"א

$$\text{Sp}(S) = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in F\} = F^3$$

**טענה 6.** יהי  $V$  מרחב וקטורי, יהי  $W$  תת־מרחב של  $V$  ו- $S$  תת־קבוצה של  $V$ . אז  $S \subset W$  אם ורק אם  $\text{Sp}(S) \subset W$ .

**הוכחה.** תחילה נניח ש- $\text{Sp}(S) \subset W$ . יהי  $v \in S$  אז  $v = 1 \cdot v \in \text{Sp}(S)$  לכן  $v \in W$ . עכשיו נניח כי  $S \subset W$ . יהי  $v \in \text{Sp}(S)$ . ע"פ הגדרה ישנם  $v_1, \dots, v_m \in S$  ו- $a_1, \dots, a_m \in F$  כך ש- $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ . מאחר ש- $W$  תת־מרחב הרי גם  $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \in W$  לכן  $v \in W$ . מש"ל.

**מסקנה 1.** תהייה  $S$  ו- $T$  תת־קבוצות של  $V$ . אז  $\text{Sp}(S) = \text{Sp}(T)$  אם ורק אם  $S \subset \text{Sp}(T)$  ו- $T \subset \text{Sp}(S)$ .

**הוכחה.** נשתמש בטענה פעם עם  $W := \text{Sp}(S)$  ופעם עם  $W := \text{Sp}(T)$ . מש"ל.

**דוגמה 11.** ניקח  $F := \mathbb{Q}$ ,  $V := \mathbb{Q}^3$ ,

$$S := \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

ו-

$$T := \{(1, 1, 2), (1, -1, 0)\}$$

החישובים

$$(1, 0, 1) = \frac{1}{2} \cdot (1, 1, 2) + \frac{1}{2} \cdot (1, -1, 0)$$

$$(0, 1, 1) = \frac{1}{2} \cdot (1, 1, 2) - \frac{1}{2} \cdot (1, -1, 0)$$

מראים כי  $S \subset \text{Sp}(T)$ . מצד שני החישובים

$$(1, 1, 2) = (1, 0, 1) + (0, 1, 1)$$

$$(1, -1, 0) = (1, 0, 1) - (0, 1, 1)$$

מראים כי  $T \subset \text{Sp}(S)$  לכן  $\text{Sp}(S) = \text{Sp}(T)$ .

**הגדרה 5.** יהי  $V$  מרחב וקטורי. תת־קבוצה  $S \subset V$  תיקרא **קבוצה פורשת** של  $V$  אם  $V = \text{Sp}(S)$ .

**הגדרה 6.** מרחב הוקטורי  $V$  יקרא **מרחב נפרש סופית** אם יש לו קבוצה פורשת סופית.

**דוגמה 12.** יהי  $V := F^n$ . לכל  $i$  מ-1 עד  $n$  נגדיר וקטור

$$\vec{e}_i := (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, \dots, 0)$$

בהנתן וקטור  $v = (a_1, \dots, a_n) \in V$  מתקיים

$$v = a_1 \vec{e}_1 + \dots + a_n \vec{e}_n$$

לכן  $F^n = \text{Sp}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  ובפרט  $F^n$  מרחב וקטורי נפרש סופית.

### מרחב הפולינומים $F[x]$

**הגדרה 7.** פולינום במשתנה אחד עם מקדמים בשדה  $F$  הוא סדרה

$$v = (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

של איברים ב- $F$ , שבה  $a_i = 0$  פרט למספר סופי של אינדקסים  $i$ .

תהי  $V$  קבוצת הפולינומים במשתנה אחד עם מקדמים ב- $F$ .

**הגדרה 8.** יהיו  $v = (a_0, a_1, \dots)$  ו- $w = (b_0, b_1, \dots)$  שני פולינומים, ויהי  $a \in F$ . נגדיר

$$v + w := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

$$a \cdot v := (aa_0, aa_1, \dots)$$

$$\vec{0} := (0, 0, \dots)$$

נשים לב כי הסדרות  $v + w$  ו- $a \cdot v$  הן פולינומים, כלומר מלבד מספר סופי כל רכיביהן הם 0.

**טענה 7.** המערכת  $(V, +, \cdot, \vec{0})$  הינה מרחב וקטורי מעל השדה  $F$ .

ההוכחה כמעט זהה למקרה של  $F^n$ , ראה דוגמה 2.

**הגדרה 9.** יהי  $v = (a_0, a_1, \dots)$  פולינום השונה מ- $\vec{0}$ . המעלה של  $v$  מוגדרת להיות

$$\deg(v) := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

המעלה של הפולינום  $\vec{0}$  מוגדרת להיות  $\deg(\vec{0}) := -1$ .

**הגדרה 10.** עבור  $0 \leq n$  נגדיר

$$x^n := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

הסדרה שבה 1 מופיע במקום ה- $n$ . הביטוי  $x$  נקרא **משתנה**, והביטוי  $x^n$  נקרא **מונום**. במקום  $x^0$  נרשום לעתים 1.

בהנתן פולינום  $v = (a_0, a_1, \dots)$  ממעלה  $n \geq$  מתקיים השוויון

$$v = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$$

במרחב הוקטורי  $V$ . יתר על כן, כתיבה זו הינה יחידה: יש בדיוק דרך אחת לבטא את  $v$  כצרוף ליניארי של המונומים  $x^0, x^1, \dots$ . מטעמי נוחות אנו נעדיף מעתה והלאה להשתמש בהצגה הזו של הפולינומים. כלומר פולינום יתואר כסכום

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

עם מקדמים  $a_i \in F$ , כאשר כמובן  $\deg(f(x)) \leq n$ . כמו כן נסמן מעתה ב-  $F[x]$  את מרחב הפולינומים.

**הערה.** שימו לב לדמיון לאופן בו אנו כותבים מספר מרוכב כ-  $a + bi$  עם  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**טענה 8.**  $F[x]$  איננו מרחב וקטורי נוצר סופית.

**הוכחה.** נשים לב כי לכל מספר טבעי  $n$  הקבוצה

$$V_n := \{f \in F[x] \mid \deg(f) \leq n\}$$

היא תת-מרחב של  $F[x]$ . נניח בשלילה כי ישנה קבוצה פורשת סופית  $S = \{f_1, \dots, f_m\}$  של  $F[x]$ . ניקח  $n$  מספיק גדול כך ש-  $\deg(f_i) \leq n$  לכל  $1 \leq i \leq m$ . לכן  $f_1, \dots, f_m \in V_n$ . ע"פ טענה 6 מקבלים  $F[x] = \text{Sp}(S) \subset V_n$ , כלומר  $F[x] = V_n$ . אבל  $x^{n+1} \notin V_n$ , וזו סתירה. מש"ל.

**הגדרה 11.** יהי  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  פולינום עם מקדמים ב-  $F$  ויהי  $c \in F$ . ההצבה של  $c$  ב-  $f(x)$  היא הסקלר

$$f(c) = \sum_{i=0}^n a_i c^i \in F$$

מקבלים פונקציה  $f: F \rightarrow F$ ,  $c \mapsto f(c)$ , שגם היא תסומן באות  $f$ .

**טענה 9.** יהיו  $f(x), g(x) \in F[x]$  ו-  $a, c \in F$  אז

$$(a \cdot f)(c) = a \cdot f(c)$$

ו-

$$(f + g)(c) = f(c) + g(c)$$

**הוכחה.** נרשום את הפולינומים כסכומים:  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  ו-  $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ . אז  $f + g$  הוא הפולינום  $\sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$  ו-  $a \cdot f$  הוא פולינום  $\sum_{i=0}^n a a_i x^i$ . לכן בהצבת  $c$  מקבלים

$$(f + g)(c) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) c^i = \sum_{i=0}^n a_i c^i + \sum_{i=0}^n b_i c^i = f(c) + g(c)$$

ו-

$$(a \cdot f)(c) = \sum_{i=0}^n a a_i c^i = a \sum_{i=0}^n a_i c^i = a \cdot f(c)$$

מש"ל.





**טענה 10.** תהי  $v = (v_1, \dots, v_n)$  סדרת וקטורים במרחב  $V$ . הסדרה  $v$  היא בלתי תלויה ליניארית אם"ם הפתרון היחיד ב- $F$  למשוואה

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \vec{0}$$

הוא הפתרון הטריוויאלי  $x_1 = \dots = x_n = 0$ .

**הגדרה 13.** תהי  $S \subset V$  תת-קבוצה. אם כל סדרה סופית  $(v_1, \dots, v_n)$  של וקטורים שונים ב- $S$  היא בלתי תלויה ליניארית, אנו אומרים כי הקבוצה  $S$  היא **בלתי תלויה ליניארית**. אחרת הקבוצה  $S$  תיקרא **תלויה ליניארית**.

בפרט הקבוצה הריקה  $\emptyset$  היא בלתי תלויה ליניארית.

**דוגמה 13.** השדה הוא  $F := \mathbb{Q}$  והמרחב הוא  $V := \mathbb{Q}^2$ .

א. הסדרה  $(v_1, v_2, v_3)$  כאשר

$$v_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

היא תלויה ליניארית, משום ש-

$$v_1 - v_2 + v_3 = \vec{0}.$$

ב. הסדרה  $(v_1, v_2)$ , כאשר

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

היא בת"ל, שהרי הפתרון היחיד למשוואה

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

הוא  $x_1 = x_2 = 0$ .

ג. ניקח את הסדרה  $(v_1, v_2)$  כאשר

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

אז

$$v_1 - \frac{1}{2}v_2 = \vec{0}$$

ולכן הסדרה תלויה ליניארית.

אנו רואים שסדרה עם חזרות, או סדרה שיש בה וקטורים פרופורציונליים זה לזה, תמיד תהיה תלויה ליניארית.

**טענה 11.** תהי  $(v_1, \dots, v_n)$  סדרה בלתי תלויה ליניארית של וקטורים במרחב  $V$ , ויהיו  $i_1, \dots, i_m$  מספרים שונים בין 1 ל- $n$ . אז הסדרה  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_m})$  היא בלתי תלויה ליניארית.

**הוכחה.** נניח כי  $a_1 v_{i_1} + \dots + a_m v_{i_m} = \vec{0}$ . נגדיר סקלרים  $b_1, \dots, b_n$  באופן הבא. לכל  $j$  נגדיר  $b_{i_j} := a_j$ , וכן  $b_i := 0$  אם  $i \notin \{i_1, \dots, i_m\}$ . אז  $b_1 v_1 + \dots + b_n v_n = \vec{0}$ . נתון שהסדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  היא בלתי תלויה ליניארית, ולכן  $b_1 = \dots = b_n = 0$ . בפרט מקבלים  $a_1 = \dots = a_m = 0$ . מש"ל.

**מסקנה 2.** תהיה  $S$  תת-קבוצה סופית של מרחב וקטורי  $V$ , ויהי  $(v_1, \dots, v_n)$  סידור של איברי  $S$ . כלומר ב- $S$  יש  $n$  איברים ונתנו להם שמות. אז הקבוצה  $S$  בלתי תלויה ליניארית אם"ם הסדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  בלתי תלויה ליניארית.

**הוכחה.** (א) נניח שהקבוצה  $S$  בלתי תלויה ליניארית. מאחר שהסדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  היא סדרה של איברים שונים ב- $S$ , הרי ע"פ ההגדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  היא בלתי תלויה ליניארית.

(ב) נניח שהסדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  בלתי תלויה ליניארית. תהי  $v$  סדרה סופית כלשהי של איברים שונים ב- $S$ . אז  $v = (v_{i_1}, \dots, v_{i_m})$  עבור אינדקסים שונים  $i_1, \dots, i_m$ . לכן ע"פ טענה 10,  $v$  סדרה בלתי תלויה ליניארית. מש"ל.

**דוגמה 14.**  $F$  שדה כלשהו. נגדיר  $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ו- $v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ב- $F^2$ . הסדרה  $(v_1, v_2)$  היא תלויה ליניארית כי  $\vec{0} = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$ . מן הטענה נובע שהקבוצה  $\{v_1, v_2\}$  תלויה ליניארית.

למעשה אנו רואים שאם  $\vec{0} \in S$  הרי  $S$  בהכרח תלויה ליניארית.

**דוגמה 15.** הקבוצה  $\{v_1\}$  תלויה ליניארית אם"ם  $v_1 = \vec{0}$ .

**דוגמה 16.** כאן השדה  $\mathbb{Q}$  והמרחב  $\mathbb{Q}^2$ . הקבוצה  $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$  תלויה ליניארית, כי מהחישוב  $\vec{0} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix} - 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  עולה שהסדרה  $(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix})$  תלויה ליניארית.

**דוגמה 17.** שוב השדה  $\mathbb{Q}$  והמרחב  $\mathbb{Q}^2$ . הקבוצה  $S := \{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$  בלתי תלויה ליניארית, כי ב- $S$  יש רק שני איברים, והסדרה  $(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})$  בלתי תלויה ליניארית.

כיצד לבדוק אם סדרת וקטורים  $(v_1, \dots, v_n)$  במרחב  $F^m$  היא בלתי תלויה ליניארית? נניח שנתונים וקטורים

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, v_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

הסדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  בלתי תלויה ליניארית אם"ם הפתרון היחיד למשוואה

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \vec{0}$$

הוא הפתרון הטריוויאלי  $x_1, \dots, x_n := 0$ . תהי  $A$  המטריצה  $A = [a_{ij}]$  בגודל  $m \times n$ . כפי שראינו כבר, אנו שואלים האם יש פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומוגנית  $AX = O$ . זאת נבדוק ע"י דירוג  $A$ .

**דוגמה 18.** ניקח  $F := \mathbb{R}$  ו- $V := \mathbb{R}^3$ . נגדיר וקטורים

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 := \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

האם הסדרה  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  בלתי תלויה ליניארית? נגדיר  $A := [v_1, v_2, v_3, v_4]$ , שהיא מטריצה מגודל  $3 \times 4$ . נתבונן במערכת המשוואות  $AX = O$  שבה 3 משוואות ו-4 נעלמים. במערכת זו יש לכל היותר 3 משתנים תלויים, ולכן לפחות משתנה חופשי אחד. משום כך ישנם פתרונות לא טריוויאליים,

והסדרה  $v$  הינה תלויה ליניארית (טענה 9). מאחר שארבעת הוקטורים הם שונים הרי על פי הגדרה הקבוצה  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  היא תלויה ליניארית.

חדי העין הבחינו שיש בדוגמה האחרונה תוצאה כללית: כל קבוצה של יותר מ- $n$  וקטורים ב- $F^n$  היא תלויה ליניארית. בהמשך נוכיח תוצאה יותר מלאה.

**משפט 2.** יהי  $V$  מרחב וקטורי ותהי  $(v_1, \dots, v_n)$  סדרת וקטורים ב- $V$  באורך 1 לפחות. אז התנאים הבאים שקולים:

1. הסדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  תלויה ליניארית.
2. לפחות אחד מבין הוקטורים  $v_1, \dots, v_n$  הוא צירוף ליניארי של קודמיו.
3. לפחות אחד מבין הוקטורים  $v_1, \dots, v_n$  הוא צירוף ליניארי של הוקטורים האחרים בסדרה.

**הוכחה.** נראה כי  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ .

$1 \Rightarrow 2$ : נתון שיש סקלרים  $a_1, \dots, a_n$  לא כולם 0 כך ש-

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \vec{0}$$

יהי  $i$  המספר המקסימלי כך ש- $a_i \neq 0$ . לכן

$$a_1 v_1 + \dots + a_i v_i = \vec{0}$$

ע"י העברת אגף נקבל

$$a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} = -a_i v_i$$

כפל בסקלר  $-a_i^{-1}$  נותן

$$-\frac{a_1}{a_i} v_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} = v_i$$

נשים לב שאם  $i = 1$  מקבלים  $v_1 = \vec{0}$ .

$2 \Rightarrow 3$ : מייד.

$3 \Rightarrow 1$ : נניח כי  $v_i$  צירוף ליניארי של הוקטורים  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ . אז

$$v_i = \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} a_j v_j = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n$$

לסקלרים כלשהם  $a_j$ . נגדיר  $a_i := -1$  ואז

$$a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + \dots + a_n v_n = \vec{0}$$

רואים שהסדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  תלויה ליניארית. מש"ל.

**דוגמה 19.** ניקח  $F := \mathbb{R}$  ו- $V := \mathbb{R}^2$ . יהיו  $v_1, v_2 \in V$  שני וקטורים שונים, ונגדיר קבוצה  $S := \{v_1, v_2\}$ . ננסה לראות מהו תת המרחב  $\text{Sp}(S)$ . יש שני מקרים.

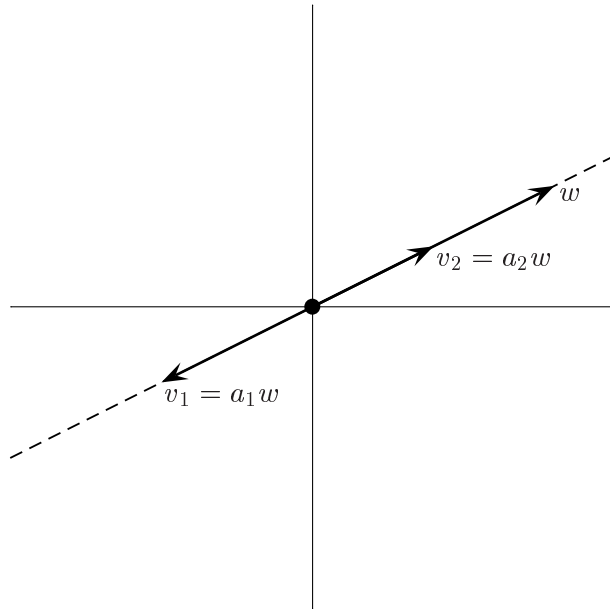
א. הקבוצה  $S$  בלתי תלויה ליניארית. אז גם הסדרה  $(v_1, v_2)$  בלתי תלויה ליניארית (כי יש שני וקטורים שונים). תהי  $A$  המטריצה  $[v_1, v_2]$ , ותהי  $A'$  מטריצה מדורגת קאנונית שקולת שורה ל- $A$ . מאחר שהפתרון היחיד למערכת המשוואות  $AX = 0$  הוא הפתרון הטריטיויאלי הרי בהכרח  $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

כעת ניקח וקטור  $w \in \mathbb{R}^2$  כלשהו. המטריצה המורחבת של מערכת המשוואות  $AX = w$  היא  $[A|w]$ , וע"י אותו תהליך דרוג שעשינו קודם מקבלים מטריצה שקולת שורה  $[A'|w'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & w'_1 \\ 0 & 1 & | & w'_2 \end{bmatrix}$ . המסקנה היא שקיים פתרון (יחיד) למערכת המשוואות  $AX = w$ , ולכן  $w \in \text{Sp}(S)$ . לסיכום, במקרה זה  $\text{Sp}(S) = \mathbb{R}^2$ .

ב. המקרה השני הוא ש- $S$  תלויה ליניארית. אז גם הסדרה  $(v_1, v_2)$  תלויה ליניארית. לכן הוקטורים  $v_1$  ו- $v_2$  פרופורציוניים זה לזה; כלומר יש סקלרים  $a_1, a_2$  ווקטור  $w \neq \vec{0}$  כך ש-  
 $v_1 = a_1 w$  ו- $v_2 = a_2 w$ . אם כן במקרה זה

$$\text{Sp}(S) = \text{Sp}(w) = \{aw \mid a \in \mathbb{R}\}$$

שהוא ישר העובר דרך הראשית  $\vec{0}$  והוקטור  $w$ . (ראה ציור).



**משפט 3.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל השדה  $F$  ותהי  $S$  קבוצה פורשת סופית של  $V$ . אז קיימת תת-קבוצה  $S'$  של  $S$  אשר הינה פורשת ובלתי תלויה ליניארית.

**הוכחה.** נתבונן באוסף תת-הקבוצות של  $S$  אשר פורשות את  $V$ . זהו אוסף לא ריק, משום שהוא כולל את  $S$  עצמה. תהי  $S'$  קבוצה באוסף זה בעלת גודל מינימלי. אנו נוכיח כי  $S'$  היא בת"ל. נניח על דרך השלילה כי  $S'$  תלויה ליניארית. אז יש בה סדרת איברים שונים  $(v_1, \dots, v_m)$  שהינה תלויה ליניארית. ע"פ משפט 2 ישנו וקטור  $v_i$  בסדרה שהוא צרוף ליניארי של האחרים. נגדיר

$$S'' := S' - \{v_i\}$$

מאחר ש-

$$v_i \in \text{Sp}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m) \subset \text{Sp}(S'')$$

הרי

$$\text{Sp}(S'') = \text{Sp}(S') = V$$

אבל מספר האיברים בקבוצה  $S''$  קטן מאשר ב- $S'$ , וזו סתירה למינימליות של  $S'$ . מש"ל.

**הגדרה 14.** יהי  $V$  מרחב וקטורי. **בסיס** של  $V$  היא תת-קבוצה פורשת בלתי תלויה ליניארית של  $V$ .

**מסקנה 3.** יהי  $V$  מרחב וקטורי נוצר סופית. אז ל- $V$  יש בסיס.

**הוכחה.** על פי הגדרה ישנה קבוצה פורשת סופית  $S$  של  $V$ . עתה נשתמש במשפט 3. מש"ל.

**דוגמה 20.** יהי  $F$  שדה כלשהו. ניקח  $n \geq 1$  ו- $F^n := V$ . נגדיר

$$\vec{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \vec{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ראינו כבר שהקבוצה  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  פורשת את  $F^n$ . מאחר שהפתרון היחיד ב- $F$  למשוואה

$$x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n = \vec{0}$$

הוא  $x_1 = \dots = x_n = 0$  הרי הקבוצה  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  היא בסיס, הנקרא **הבסיס הסטנדרטי**.

**דוגמה 21.** יהי  $n$  מספר טבעי ויהי  $V$  מרחב הפולינומים ממעלה  $n \geq 1$  מעל השדה  $F$  במשתנה  $x$ . הקבוצה  $\{1, x, \dots, x^n\}$  היא בסיס של  $V$ .

**דוגמה 22.** השדה הוא  $F := \mathbb{R}$  והמרחב הוא  $V := \mathbb{R}^2$ . נתבונן בקבוצה  $S := \{v_1, v_2\}$  כאשר  $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  ו- $v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . האם  $S$  בסיס של  $V$ ?

א. האם  $S$  בלתי תלויה ליניארית? כלומר האם יש פתרון לא טריוויאלי למשוואה  $AX = O$

$$\text{כאשר } A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ נדרג את } A:$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

הדרגה היא 2. לכן אין פתרון לא טריוויאלי, ו- $S$  בת"ל.

ב. האם  $S$  פורשת את  $V$ ? כלומר האם בהנתן וקטור  $w \in \mathbb{R}^2$  יש פתרון למשוואה  $AX = w$ ?

$$\text{נרשום } w = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ וננסה לדרג את המטריצה המורחבת } [A | w]:$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \end{array} \right] = [A' | w']$$

ע"פ משפט שהוכחנו, מאחר שדרגת  $A'$  שווה לדרגת  $[A' | w']$  הרי יש פתרון. לכן  $S$  אמנם קבוצה פורשת.

מסקנה:  $S$  בסיס של  $V$ .

**דוגמה 23.** בדרך כלל יש הרבה בסיסים שונים למרחב וקטורי נתון. בתנאים של הדוגמה הקודמת יהיו  $c, d$  שני מספרים ממשיים שונים מ-0. אז הקבוצה  $\left\{ \begin{bmatrix} c \\ 2c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ d \end{bmatrix} \right\}$  היא בסיס של  $\mathbb{R}^2$ .

**הגדרה 15.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$ . **בסיס סדור** של  $V$  הוא סדרה בלתי תלויה ליניארית  $(v_1, \dots, v_n)$  של וקטורים כך ש-  $\text{Sp}(v_1, \dots, v_n) = V$ .

ההבדל בין בסיס לבסיס סדור מומחש בדוגמה הבאה.

**דוגמה 24.** ניקח  $F$  כלשהו ו-  $V := F^2$ . הקבוצה

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{\vec{e}_2, \vec{e}_1\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1\}$$

היא בסיס של  $V$ . הסדרות  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  ו-  $(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$  הן שני בסיסים סדורים שונים של  $V$ . הסדרה  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1)$  איננה בסיס סדור של  $V$ .

עתה לענות על השאלה הבאה. נניח שנתונה קבוצת וקטורים  $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset F^m$ . כיצד למצוא בסיס ל-  $\text{Sp}(S)$ ? התשובה ניתנת במשפט הבא.

**משפט 4.** נתונה סדרת וקטורים  $(v_1, \dots, v_n)$  במרחב הוקטורי  $F^m$  מעל השדה  $F$ . תהי  $A$  המטריצה מגודל  $m \times n$  שעמודותיה  $v_1, \dots, v_n$ , ותהי  $A'$  מטריצה מדורגת קאנונית שקולת-שורה ל-  $A$ . יהיו  $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$  המשתנים **התלויים** של מערכת המשוואות  $A'X = 0$ . אז הסדרה  $(v_{k_1}, \dots, v_{k_r})$  היא בסיס סדור של המרחב  $\text{Sp}(v_1, \dots, v_n)$ .

**הוכחה.** א. נוכיח איתלות של הסדרה  $(v_{k_1}, \dots, v_{k_r})$ . עמודה מס'  $k_j$  במטריצה  $A'$  היא הוקטור  $\vec{e}_j \in F^m$ . כלומר המטריצה  $B := [v_{k_1}, \dots, v_{k_r}]$  שקולת-שורה למטריצה  $B' := [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r]$ . לכן המשוואה

$$x_{k_1}v_{k_1} + \dots + x_{k_r}v_{k_r} = \vec{0}$$

שקולה למשוואה

$$x_{k_1}\vec{e}_1 + \dots + x_{k_r}\vec{e}_r = \vec{0}$$

אשר אין לה פתרון לא טריוויאלי.

ב. פרישה: לכל  $l \notin \{k_1, \dots, k_r\}$ , כלומר לכל משתנה חופשי  $x_l$ , רוצים לקבל את הוקטור  $v_l$  כצרוף ליניארי של הוקטורים  $v_{k_1}, \dots, v_{k_r}$ . נציב  $x_l := -1$ , וביתר המשתנים החופשיים  $x_{k_j}$  נציב  $x_{k_j} := 0$ . יהי  $(d_1, \dots, d_n)$  הפתרון המתקבל למערכת המשוואות  $AX = 0$ . זאת אומרת  $\sum_{j=1}^n d_j v_j = \vec{0}$ , ו-  $d_l = -1$  ו-  $d_{k_j} = 0$  לאינדקסים  $l'$  המתאימים ליתר המשתנים החופשיים. ע"י העברת אגף מקבלים

$$d_{k_1}v_{k_1} + \dots + d_{k_r}v_{k_r} = v_l$$

מש"ל.

## בסיס למרחב הפתרונות של מערכת משוואות

בהנתן מערכת משוואות הומוגניות  $AX = O$  או יודעים כי קבוצת הפתרונות היא מרחב וקטורי. מטרתנו כעת היא למצוא בסיס למרחב זה.

**משפט 5.** תהי  $A$  מטריצה מגודל  $m \times n$  מעל השדה  $F$ , ויהי  $W$  מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית  $AX = O$ . תהי  $A'$  מטריצה מדורגת קאנונית שקולת-שורה ל- $A$  ויהיו  $x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}$  המשתנים החופשיים של מערכת המשוואות  $A'X = O$ . עבור  $i$  בטווח  $1, \dots, n-r$  יהי  $w_i \in F^n$  הפתרון למערכת המשוואות  $AX = O$  כך ש- $x_{l_i} := 1$  ו- $x_{l'} := 0$  לכל המשתנים החופשיים האחרים (ראה משפט 3). אז הסדרה  $(w_1, \dots, w_{n-r})$  היא בסיס סדור של  $W$ .

**הוכחה.** בהינתן סקלרים  $c_1, \dots, c_{n-r}$  יהי  $w := \sum_{i=1}^{n-r} c_i w_i \in F^n$ . אז  $w$  הוא הפתרון היחיד למערכת המשוואות  $AX = O$  שבו  $x_{l_i} := c_i$  לכל המשתנים החופשיים. אם  $w = \vec{0}$  הרי  $c_1, \dots, c_{n-r} = 0$ ; לכן הסדרה  $(w_1, \dots, w_{n-r})$  בלתי תלויה ליניארית. מאחר שכל הפתרונות למערכת המשוואות מתקבלים בצורה כזו הרי  $W = \text{Sp}(w_1, \dots, w_{n-r})$ . מש"ל.

**דוגמה 25.** ניקח  $F := \mathbb{Q}$  ו- $A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ . מחפשים בסיס למרחב הפתרונות  $W$  של מערכת המשוואות  $AX = O$ . נדרג את המטריצה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

המשתנים החופשיים הם  $x_3$  ו- $x_4$ , האינדקסים הם  $l_1 = 3$  ו- $l_2 = 4$ , והפתרונות המתאימים הם

$$w_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_1 := \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

הסדרה  $(w_1, w_2)$  היא בסיס סדור של  $W$ .

## מימד של מרחב וקטורי

הנושא שנלמד כעת הוא מושג המימד של מרחב וקטורי. זו דרך אלגברית לבטא את מושג המימד המוכר מהגיאומטריה האוקלידית (נקודה, ישר, מישור...).

תהי  $S$  קבוצה. נסמן ב- $|S|$  את עוצמתה של  $S$ , כלומר את מספר איבריה.

**משפט 6.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$ , תהי  $S$  קבוצה פורשת סופית של  $V$ , ותהי  $T$  קבוצה בלתי תלויה ליניארית ב- $V$ . אז  $|T| \leq |S|$ .

**הוכחה.** יהי  $|S| := n$ , ונניח על דרך השלילה כי בקבוצה  $T$  יש לפחות  $n+1$  איברים. נבחר סדרה  $(w_1, \dots, w_{n+1})$  של איברים שונים ב- $T$ , ויהי  $(v_1, \dots, v_n)$  סידור כלשהו של אברי  $S$ . מאחר שהקבוצה



$S$  פורשת את  $V$  הרי ניתן למצוא סקלרים  $a_{i,j}$  כך ש-  $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$  לכל  $j$ . נתבונן במטריצה  
 $A := [a_{ij}]$ . מאחר שזו מטריצה מגודל  $n \times (n+1)$  קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת  
 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{bmatrix}$   
 המשוואות  $AX = O$ . זה אומר שלכל  $i$  מתקיים  $\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}c_j = 0$ . אבל אז

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j w_j = \sum_{j=1}^{n+1} c_j \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} c_j \right) v_i = 0$$

מאחר שלא כל הסקלרים  $c_1, \dots, c_{n+1}$  הם 0 נובע שהסדרה  $(w_1, \dots, w_{n+1})$  היא תלויה ליניארית. זה עומד בסתירה לכך שהקבוצה  $T$  בלתי תלויה ליניארית. מש"ל.

**מסקנה 4.** יהיו  $T, S$  שני בסיסים של המרחב הוקטורי  $V$ . אם  $S$  קבוצה סופית, אז  $|T| = |S|$ .

**הוכחה.** ע"פ משפט 6 ידוע לנו ש-  $|T| \leq |S|$ . בפרט גם  $T$  קבוצה סופית. כעת בחילופי תפקידים בין  $S$  ו-  $T$  נקבל מהמשפט ש-  $|S| \leq |T|$ . מש"ל.

**הגדרה 16.** יהי  $V$  מרחב וקטורי עם בסיס סופי  $S$  המכיל  $n$  וקטורים. המספר  $n$  נקרא **המימד** של  $V$ , ומסומן  $\dim(V)$ .

**דוגמה 26.** ניקח  $V := F^n$ ,  $n \geq 1$ . למרחב זה יש בסיס  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  שעוצמתו  $n$ . במקרה  $n = 0$  הבסיס של  $F^0 = \{\vec{0}\}$  הוא הקבוצה  $\emptyset$  שעוצמתה 0. לכן תמיד  $\dim(F^n) = n$ . מש"ל.

לעתים נשתמש בקיצורים בת"ל ו- ת"ל עבור 'בלתי תלויה ליניארית' ו- 'תלויה ליניארית'.

**מסקנה 5.** יהי  $V$  מרחב וקטורי ממימד  $n$  ותהי  $S$  תת-קבוצה של  $V$ .

- א. אם  $S$  קבוצה פורשת של  $V$  אז  $|S| \geq n$ .
- ב. אם  $S$  קבוצה בת"ל אז  $|S| \leq n$ .
- ג. אם  $S$  קבוצה פורשת של  $V$  ו-  $|S| \leq n$  אז  $S$  בסיס של  $V$  ו-  $|S| = n$ .
- ד. אם  $S$  קבוצה בת"ל ו-  $|S| \geq n$  אז  $S$  בסיס של  $V$  ו-  $|S| = n$ .

**הוכחה.** ניקח בסיס כלשהו  $T$  של  $V$ . ע"פ הגדרת המימד מתקיים  $|T| = n$ .

א.  $T$  בת"ל, לכן על פי המשפט  $|S| \geq |T|$ .

ב.  $T$  פורשת, לכן  $|S| \leq |T| = n$ .

ג. לפי משפט 3 ישנה תת-קבוצה  $S' \subset S$  שהיא בסיס של  $V$ . מחלק אי נובע ש-  $|S'| \geq n$ . לכן  $|S'| = |S| = n$  ו-  $S' = S$ .

ד. נניח על דרך השלילה ש-  $S$  איננה פורשת את  $V$ . אז ישנו וקטור  $v \in V - \text{Sp}(S)$ . הקבוצה  $S' := S \cup \{v\}$  מכילה לפחות  $n+1$  איברים והיא עדיין בת"ל. זו סתירה לחלק ב' של הטענה. מש"ל.

**מסקנה 6.** יהי  $V$  מרחב וקטורי ממימד  $n$  ויהי  $W \subset V$  תת־מרחב. אז  $\dim(W) \leq n$ . אם  $\dim(W) = n$  אז  $W = V$ .

**הוכחה.** כל תת־קבוצה בת"ל  $S$  של  $W$  היא גם תת־קבוצה בת"ל של  $V$ , ובעזרת מסקנה 5 (ב) מקבלים  $|S| \leq n$ . תהי  $S$  תת־קבוצה בת"ל של  $W$  בעלת העוצמה המקסימלית  $m$ . ברור ש־ $m \leq n$ . אנו טוענים ש־ $S$  פורשת את  $W$ . אחרת כמו בהוכחת מסקנה 5 (ד) אז ישנו וקטור  $w \in W - \text{Sp}(S)$ . הקבוצה  $S' := S \cup \{w\}$  מכילה  $m + 1$  איברים והיא עדיין בת"ל. זו סתירה למקסימליות של  $S$ . אם  $m = n$  אז לפי מסקנה 5 (ד) הקבוצה  $S$  פורשת גם את  $V$ , ולכן  $W = V$ . מש"ל.

**דוגמה 27.** השדה הוא  $\mathbb{R}$  והמרחב הוא המישור  $\mathbb{R}^2$ . יהי  $W \subset \mathbb{R}^2$  תת־מרחב. לפי מסקנה 6 הערכים האפשריים ל־ $\dim(W)$  הם 0, 1 או 2.

- אם  $\dim(W) = 0$  אז  $W = \{\vec{0}\}$ . בסיס הוא  $S = \emptyset$ .
- אם  $\dim(W) = 1$  אז  $W = \text{Sp}(w)$ , כאשר  $w$  הוא וקטור כלשהו ב־ $W$  השונה מ־ $\vec{0}$ . כלומר  $W$  הוא הישר העובר דרך  $w$  ו־ $\vec{0}$ . בסיס ל־ $W$  הוא  $S = \{w\}$ .
- אם  $\dim(W) = 2$  אז  $W = \mathbb{R}^2$ . בתור בסיס אפשר לקחת  $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ .

**דוגמה 28.** נתבונן במערכת משוואות הומוגנית  $AX = O$  שבה  $m$  משוואות ב־ $n$  משתנים. נניח שיש  $r$  משתנים תלויים. יהי  $W$  מרחב הפתרונות. במשפט 5 ראינו בסיס סדור ל־ $W$  באורך  $n - r$ . לכן  $\dim(W) = n - r$ .

**דוגמה 29.** כאן  $F := \mathbb{R}$ ,

$$V := \{ \text{פולינומים ממעלה } \geq 3 \text{ במשתנה } x \text{ מעל } \mathbb{R} \}$$

ר

$$W := \{ f(x) \in V \mid f(-1) = 0 \}$$

בשל טענה 8 (עם  $c := -1$ ) רואים כי  $W$  הוא תת־מרחב של  $V$ . נמצא בסיס ל־ $W$ . נרשום

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

התנאי ש־ $f(x) \in W$  הוא

$$0 = f(-1) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3$$

אם כן אנו מחפשים פתרון המשוואה ההומוגנית

$$(*) \quad y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0$$

במשתנים  $y_1, y_2, y_3, y_4$ . בסיס למרחב הפתרונות של  $W'$  של המשוואה (\*) הוא  $\{w'_1, w'_2, w'_3\}$  כאשר

$$w'_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w'_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w'_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

התרגום לפולינומים נותן בסיס  $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$  ל־ $W$ , כאשר

$$f_1(x) := 1 + x, \quad f_2(x) := -1 + x^2, \quad f_3(x) := 1 + x^3$$

המימד הוא  $\dim(W) = 3$ .

**מסקנה 7.** תהי  $AX = B$  מערכת של  $n$  משוואות ב- $n$  נעלמים (ז"א המטריצה  $A$  ריבועית). נתון כי הפתרון היחיד למערכת המשוואות ההומוגנית  $AX = O$  הוא הפתרון הטריוויאלי. אז קיים פתרון למערכת המשוואות  $AX = B$ .

**הוכחה.** תהיינה העמודות של  $A$   $v_1, \dots, v_n$ . מכך שאין פתרון לא טריוויאלי ל- $AX = O$  נובע שהסדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  היא בת"ל. לכן לפי מסקנה 5 (ד) רואים ש- $(v_1, \dots, v_n)$  בסיס סדור של  $F^n$ . בפרט  $F^n = \text{Sp}(v_1, \dots, v_n)$ , ולכן יש פתרון ל- $AX = B$ . מש"ל.

**משפט 7.** תהי  $(v_1, \dots, v_n)$  סדרת וקטורים במרחב הוקטורי  $V$  מעל השדה  $F$ . התנאים הבאים שקולים:

1.  $(v_1, \dots, v_n)$  היא בסיס סדור של  $V$ .
2. כל וקטור  $v$  ב- $V$  ניתן לכתיבה יחידה כצרוף ליניארי

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

עם סקלרים  $a_1, \dots, a_n \in F$ .

**הוכחה.**  $1 \Leftarrow 2$ : ידוע כי  $V = \text{Sp}(v_1, \dots, v_n)$ . לכן בהנתן  $v \in V$  קיימים סקלרים  $a_1, \dots, a_n$  כך ש-  
 $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ . אם גם  $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$  הרי

$$\vec{0} = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n$$

בשל כך שהסדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  בת"ל מקבלים  $a_i - b_i = 0$  לכל  $i$ . כלומר  $a_i = b_i$ .

$1 \Leftarrow 2$ : העובדה שהוקטורים  $v_1, \dots, v_n$  פורשים את  $V$  ברורה. נוכיח אי תלות של הסדרה. ניקח  $\vec{0} := v$ . היחידות בתנאי 2 אומרת שהפתרון היחיד למשוואה  $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \vec{0}$  הוא הפתרון הטריוויאלי. מש"ל.

**הגדרה 17.** יהי  $v = (v_1, \dots, v_n)$  בסיס סדור של מרחב וקטורי  $V$  מעל שדה  $F$ , ויהי  $v$  וקטור כלשהו

ב- $V$ . משפט 7 אומר שיש וקטור יחיד  $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in F^n$  כך ש- $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ . הוקטור  $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$  נקרא **וקטור הקואורדינטות** של  $v$  ביחס לבסיס הסדור  $v$ , והוא יסומן  $[v]_v$ .

**דוגמה 30.** יהי  $F$  שדה כלשהו ו- $F^n := V$ . הבסיס הסטנדרטי  $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  הוא בסיס סדור של  $F^n$ . לכל וקטור  $v \in F^n$  מתקיים  $[v]_e = v$ .

**דוגמה 31.** ניקח  $F := \mathbb{R}$  ו- $V := \mathbb{R}^2$ . נגדיר וקטורים  $v_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  ו- $v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . הסדרה  $v := (v_1, v_2)$  היא בסיס סדור. נחשב את הקואורדינטות של אברי הבסיס הסטנדרטי  $e$  ביחס לבסיס הסדור  $v$ .

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}v_1 \text{ ו- } \vec{e}_2 = v_2 - \frac{1}{2}v_1 \text{ מקבלים } [\vec{e}_1]_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ו- } [\vec{e}_2]_v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

**טענה 12.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מממד  $n$  ויהי  $W$  תת־מרחב של  $V$  מממד  $m$ . נניח כי  $(v_1, \dots, v_m)$  בסיס סדור של  $W$ . אז קיימים וקטורים  $v_{m+1}, \dots, v_n \in V$  כך שהסדרה

$$(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$$

הינה בסיס סדור למרחב  $V$ .

**הוכחה.** נגדיר באינדוקציה על  $i$  בטווח  $0, \dots, n - m$  סדרה בת"ל

$$(v_1, \dots, v_m, \dots, v_{m+i})$$

עבור  $i = 0$  זה נתון. אם  $i < n - m$  אז  $m + i < n$  ולכן

$$\text{Sp}(v_1, \dots, v_m, \dots, v_{m+i}) \neq V$$

קיים אם כן וקטור  $v_{m+i+1} \in V$  שאיננו צרוף ליניארי של  $v_1, \dots, v_m, \dots, v_{m+i}$ , והסדרה

$$(v_1, \dots, v_m, \dots, v_{m+i}, v_{m+i+1})$$

היא בת"ל. מש"ל.

**טענה 13.** יהי  $V$  מרחב וקטורי ויהיו  $W_1$  ו־ $W_2$  שני תת־מרחבים של  $V$ . אז החיתוך  $W_1 \cap W_2$  הוא תת־מרחב.

**הוכחה.** מאחר ש־ $\vec{0} \in W_1$  וגם  $\vec{0} \in W_2$  הרי  $\vec{0} \in W_1 \cap W_2$ . יהיו  $w_1, w_2 \in W_1 \cap W_2$ . אז  $w_1 + w_2 \in W_1$  וגם  $w_1 + w_2 \in W_2$ ; לכן  $w_1 + w_2 \in W_1 \cap W_2$ . לבסוף לכל  $a \in F$  מתקיים  $aw_1 \in W_1$  וגם  $aw_1 \in W_2$ ; לכן  $aw_1 \in W_1 \cap W_2$ . מש"ל.

**דוגמה 32.** איחוד של שני תת־מרחבים בדרך כלל איננו תת־מרחב. ניקח לדוגמה את המרחב  $\mathbb{R}^2$  מעל השדה  $\mathbb{R}$ , ואת תת־המרחבים  $W_1 := \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$  ו־ $W_2 := \{(0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ . אז  $W_1 \cup W_2$  איננו תת־מרחב.

**הגדרה 18.** יהי  $V$  מרחב וקטורי ויהיו  $W_1$  ו־ $W_2$  שני תת־מרחבים של  $V$ . הסכום  $W_1 + W_2$  הוא התת־מרחב הבא של  $V$ :

$$W_1 + W_2 := \text{Sp}(W_1 \cup W_2)$$

**משפט 8.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף מימדי מעל שדה  $F$  ויהיו  $W_1$  ו־ $W_2$  תת־מרחבים של  $V$ . אז מתקיים השוויון:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

**הוכחה.** נבחר בסיס סדור  $w_0 = (w_1, \dots, w_l)$  ל־ $W_1 \cap W_2$ . עפ"י טענה 11 ניתן להוסיף וקטורים ל־ $w_0$  כך ש־

$$w_1 := (w_1, \dots, w_l, u_{l+1}, \dots, u_m)$$

בסיס סדור של  $W_1$  ו־

$$w_2 := (w_1, \dots, w_l, v_{l+1}, \dots, v_n)$$

בסיס סדור של  $W_2$ . נגדיר

$$. \mathbf{w} := (w_1, \dots, w_l, u_{l+1}, \dots, u_m, v_{l+1}, \dots, v_n)$$

זו סדרת וקטורים באורך

$$. m + n - l = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

אנו נוכיח כי  $\mathbf{w}$  בסיס סדור של  $W_1 + W_2$ .

מאחר ש- $w_1$  ו- $w_2$  הן תת-סדרות של  $\mathbf{w}$  נובע ש- $\mathbf{w}$  פורשת את  $W_1 + W_2$ . נוכיח כי סדרה זו בת"ל. נניח כי נתונים סקלרים  $a_i, b_i, c_i$  כך ש-

$$. a_1 w_1 + \dots + a_l w_l + b_{l+1} u_{l+1} + \dots + b_m u_m + c_{l+1} v_{l+1} + \dots + c_n v_n = \vec{0}$$

נגדיר וקטור

$$. w := a_1 w_1 + \dots + a_l w_l + b_{l+1} u_{l+1} + \dots + b_m u_m$$

אז  $w \in W_1$  אבל גם

$$, w = 0 \cdot w_1 + \dots + 0 \cdot w_l + (-c_{l+1}) v_{l+1} + \dots + (-c_n) v_n$$

ולכן  $w \in W_2$ . אם כן  $w \in W_1 \cap W_2$ . מאחר ש- $w_0$  בסיס סדור של  $W_1 \cap W_2$  הרי ישנם סקלרים  $d_1, \dots, d_l$  כך ש-

$$. w = d_1 w_1 + \dots + d_l w_l$$

מהיחידות של הכתיבה של  $w$  בבסיס הסדור  $w_1$  של  $W_1$  מקבלים  $a_1 = d_1, \dots, a_l = d_l, b_{l+1} = 0, \dots, b_m = 0, \dots$  מהיחידות של הכתיבה של  $w$  בבסיס הסדור  $w_2$  של  $W_2$  מקבלים  $d_1 = 0, \dots, d_l = 0, c_n = 0, \dots, c_{l+1} = 0$ . מכאן נובע ש- $a_i = 0, b_i = 0, c_i = 0$  לכל האינדקסים  $i$ . מש"ל.

**דוגמה 33.** במרחב  $\mathbb{Q}^3$  מעל השדה  $\mathbb{Q}$  ניקח את הווקטורים

$$. v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

נגדיר  $W_1 := \text{Sp}(v_1, v_2)$  ו- $W_2 := \text{Sp}(v_3, v_4)$ . ברצוננו לחשב את  $W_1 + W_2$  ו- $W_1 \cap W_2$ . מאחר ש- $W_1 + W_2 = \text{Sp}(v_1, v_2, v_3, v_4)$  הרי בסיס למרחב זה אפשר למצוא ע"י דרוג המטריצה הבאה.

$$[v_1, v_2, v_3, v_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

רואים ש- $W_1 + W_2 = \mathbb{Q}^3$ . מאחר ש-

$$\dim(W_1) = \dim(W_2) = 2$$

מקבלים ממשפט 8 ש- $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ .

עתה ננסה למצוא בסיס של  $W_1 \cap W_2$ . נשים לב שווקטור  $w \in W_1 \cap W_2$  הוא וקטור מהצורה

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 = a_3 v_3 + a_4 v_4$$

עבור סקלרים  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . רביעיית סקלרים זו היא פתרון של המשוואה

$$. x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 (-v_3) + x_4 (-v_4) = \vec{0}$$

נפתור משוואה זו ע"י דרוג:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

בסיס למרחב הפתרוניות הוא הוקטור  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ , והבסיס המתאים ל-  $W_1 \cap W_2$  הוא הוקטור

$$. w := -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{2}v_3 + v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

## ד. חשבון מטריצות

בפרק זה נלמד כיצד לכפול מטריצות. נזכיר כי  $M_{m \times n}(F)$  הוא מרחב המטריצות מגודל  $m \times n$  מעל השדה  $F$ .

**הגדרה 1.** בהינתן מטריצות  $A \in M_{m \times n}(F)$  ו-  $B \in M_{n \times p}(F)$  נגדיר מטריצה  $A \cdot B \in M_{m \times p}(F)$  באופן הבא. נרשום  $A = [a_{ij}]$  ו-  $B = [b_{jk}]$ , ונגדיר

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

לכל  $i, k$ . אז המכפלה היא

$$A \cdot B := [c_{ik}]$$

בצורה גראפית זה נראה כך:

$$\begin{array}{c} [a_{ij}] \\ \left[ \begin{array}{cccc} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array} \right] \cdot \begin{array}{c} [b_{jk}] \\ \left[ \begin{array}{cccc} * & \cdots & b_{1k} & \cdots & * \\ * & \cdots & b_{2k} & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & b_{nk} & \cdots & * \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} [c_{ik}] \\ \left[ \begin{array}{cccc} * & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & c_{ik} & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & \cdots & * \end{array} \right] \end{array}
 \end{array}$$

יש לשים לב שהמכפלה  $A \cdot B$  מוגדרת רק אם אורך השורות ב-  $A$  שווה לאורך העמודות ב-  $B$ !

בשתי הדוגמאות הבאות השדה הוא  $\mathbb{R} := F$ .

**דוגמה 1.** עבור  $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  ו-  $B := \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$  המכפלה היא

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 21 & 24 & 27 \\ 47 & 54 & 61 \end{bmatrix}$$

נשים לב כי לא מוגדרת המכפלה  $B \cdot A$ .

**דוגמה 2.** ניקח  $A := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$  ו-  $B := [2 \ 4]$ . כאן מוגדרות שתי המכפלות:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

ו-

$$B \cdot A = [10]$$

נשים לב כי  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

**דוגמה 3.** כאן  $F$  הוא שדה כלשהו. תהי  $A := I_{m \times m} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$  ותהי  $B \in M_{m \times n}(F)$  מטריצה כלשהי. נחשב את הרכיב ה- $(i, k)$  של המטריצה  $A \cdot B$ . תחילה נעשה זאת בעזרת הייצוג הגרפי:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * & \cdots & b_{1k} & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & b_{ik} & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & b_{mk} & \cdots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & b_{ik} & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

ענה נעשה זאת בנוסחה. מהגדרת המטריצה  $A$  ידוע ש-

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

לכן

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} = \left( \sum_{j=i} a_{ij} b_{jk} \right) + \left( \sum_{j \neq i} a_{ij} b_{jk} \right) = 1 \cdot b_{ik} + 0 = b_{ik}$$

מצאנו שהרכיב ה- $(i, k)$  של  $I_{m \times m} \cdot B$  זהה להרכיב ה- $(i, k)$  של  $B$ . לכן

$$I_{m \times m} \cdot B = B$$

בדומה מראים כי

$$B \cdot I_{n \times n} = B$$

**דוגמה 4.** מטריצה סקלרית היא מטריצה מהצורה

$$a \cdot I_{n \times n} = \begin{bmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

כאשר  $a \in F$ . תהי  $A := a \cdot I_{n \times n}$  מטריצה סקלרית ותהי  $B \in M_{n \times p}(F)$  מטריצה כלשהי. אותו חישוב מהדוגמה הקודמת מראה ש-

$$A \cdot B = a \cdot B$$

בדומה אם  $B \in M_{m \times n}(F)$  מקבלים

$$B \cdot A = a \cdot B$$

בפרט כאשר  $B$  מטריצה ריבועית בגודל  $n \times n$  הרי

$$B \cdot A = a \cdot B = B \cdot A$$

**טענה 1.** כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי. זאת אומרת שבהנתן  $A \in M_{m \times n}(F)$ ,  $B \in M_{n \times p}(F)$  ו- $C \in M_{p \times q}(F)$  מתקיים

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$



**הוכחה.** לכל זוג אינדקסים  $(j, l)$  הרכיב ה- $(j, l)$  במטריצה  $B \cdot C$  הוא  $\sum_{k=1}^p b_{jk}c_{kl}$ . לכן לכל זוג אינדקסים  $(i, l)$  הרכיב ה- $(i, l)$  במטריצה  $A \cdot (B \cdot C)$  הוא

$$(*) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \sum_{k=1}^p b_{jk}c_{kl} \right)$$

מצד שני הרכיב ה- $(i, k)$  במטריצה  $A \cdot B$  הוא  $\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ . מקבלים שהרכיב ה- $(i, l)$  במטריצה  $(A \cdot B) \cdot C$  הוא

$$(**) \quad \sum_{k=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right) c_{kl}$$

מש"ל. בשל תכונות החשבון בשדה הסכומים  $(*)$  ו- $(**)$  שווים.

**טענה 2.** כפל מטריצות הוא דיסטריוטיבי. כלומר אם  $A, B \in M_{m \times n}(F)$  ו- $C, D \in M_{n \times p}(F)$  אז

$$A \cdot (C + D) = (A \cdot C) + (A \cdot D)$$

ו-

$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$

**הוכחה.** נרשום  $A = [a_{ij}]$ ,  $C = [c_{ij}]$  ו- $D = [d_{ij}]$ . הרכיב ה- $(i, k)$  במטריצה  $A \cdot (C + D)$  הוא

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(c_{jk} + d_{jk})$$

הרכיב ה- $(i, k)$  במטריצה  $(A \cdot C) + (A \cdot D)$  הוא

$$\left( \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk} \right) + \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}d_{jk} \right)$$

אולם בשל כללי החשבון בשדה זה בדיוק אותו סקלר. לכן

$$A \cdot (C + D) = (A \cdot C) + (A \cdot D)$$

בצורה דומה מוכיחים ש-

$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$

מש"ל.

**טענה 3.** יהיו  $A \in M_{m \times n}(F)$ ,  $B \in M_{n \times p}(F)$  ו- $c \in F$ . אז

$$A(cB) = (cA)B = c(AB)$$

**הוכחה.** זה משום שלכל זוג אינדקסים  $(i, k)$  מתקיים

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}cb_{jk} = \sum_{j=1}^n ca_{ij}b_{jk}$$

מש"ל.

מעתה נקצר בכתיבת כפל מטריצות: נשמיט סוגריים ואת סימן הכפל היכן שאין מקום לבלבול, בדיוק כשם שעשינו עבור סקלרים בשדה.

**טענה 4.** תהייה  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(F)$  ו-  $B \in M_{n \times p}(F)$  שתי מטריצות. נסמן ב-  $A_1, \dots, A_m$  את השורות של  $A$ , ונסמן ב-  $B_1, \dots, B_n$  את השורות של  $B$ . אז לכל  $i$  השורה ה-  $i$  במטריצה  $AB$  היא

$$A_i B = a_{i1}B_1 + \dots + a_{in}B_n$$

**הוכחה.** על פי הגדרת הכפל הסקלר שמופיע במקום  $k$  בשורה  $i$  במטריצה  $AB$  הוא  $\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ . זהו בדיוק הסקלר שמופיע במקום  $k$  במטריצה  $A_i B$ . מש"ל.

באופן גראפי זה נראה כך:

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + \cdots + a_{in}B_n \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}$$

וגם כך:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_n B \end{bmatrix}$$

**דוגמה 5.** ניקח  $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  ו-  $B := \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$  מעל  $\mathbb{Q}$ . אז

$$A_1 \cdot B = [1 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = [25 \ 28]$$

$$A_2 \cdot B = [3 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = [57 \ 64]$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \end{bmatrix}$$



**משפט 1.** תהי  $e$  פעולת שורה אלמנטרית ותהי  $E := e(I_{m \times m})$  המטריצה האלמנטרית המתאימה. אז לכל מטריצה  $A$  בגודל  $m \times n$  מתקיים  $e(A) = EA$ .

**הוכחה.** נרשום  $E = [e_{ij}]$  ותהיינה השורות של  $A$ ,  $L_1, \dots, L_m$ . בעזרת טענה 4 רואים ש-

$$EA = E \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ e_{i1}L_1 + \dots + e_{im}L_m \\ \vdots \end{bmatrix}$$

כרגיל נפריד בין שלושה מקרים לפי סוג הפעולה  $e$ .

(1) המקרה  $e = (cL_p \rightarrow L_p)$ . כאן  $e_{pp} = c$ , עבור  $i \neq p$ ,  $e_{ii} = 1$ , ויתר הרכיבים הם 0. לכן שורה  $p$  ב- $EA$  היא  $cL_p$ , ויתר השורות זהות לאלו של  $A$ . רואים כי  $EA = e(A)$ .

(2) המקרה  $e = (L_p + cL_q \rightarrow L_p)$ . כאן  $e_{ii} = 1$  לכל  $i$ ,  $e_{pq} = c$ , ויתר הרכיבים הם 0. לכן שורה  $p$  ב- $EA$  היא  $L_p + cL_q$ , ויתר השורות זהות לאלו של  $A$ . רואים כי  $EA = e(A)$ .

(3) המקרה  $e = (L_p \leftrightarrow L_q)$ . כאן  $e_{pp} = e_{qq} = 1$ , עבור  $i \neq p, q$ , ויתר הרכיבים הם 0. לכן שורה  $p$  ב- $EA$  היא  $L_q$ , שורה  $q$  ב- $EA$  היא  $L_p$ , ויתר השורות זהות לאלו של  $A$ . רואים כי  $EA = e(A)$  מש"ל.

**דוגמה 7.** השדה הוא  $\mathbb{Q}$ . נתחיל מהמטריצה  $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  ונדרג אותה ע"י כמה פעולות שורה אלמנטריות:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כאשר

$$e_1 = (L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2)$$

$$e_2 = (-\frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_2)$$

$$e_3 = (L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1)$$

המטריצות האלמנטריות  $E_i := e_i(I_{2 \times 2})$  הן

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מקבלים

$$E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ו-

$$E_3 E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כצפוי.

**מסקנה 1.** תהיינה  $A$  ו- $B$  מטריצות מגודל  $m \times n$  מעל שדה  $F$ . התנאים הבאים שקולים:  
א.  $A$  ו- $B$  הן שקולות שורה.

ב. קיימות מטריצות אלמנטריות  $E_1, \dots, E_s$  בגודל  $m \times m$  כך ש-

$$B = E_s \cdots E_2 E_1 A$$

**הוכחה.** א  $\Leftarrow$  ב: בהינתן סדרת פעולת שורה אלמנטריות

$$A = A_0 \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_s} A_s = B$$

נגדיר מטריצות  $E_i := e_i(I_{m \times m})$ . ע"פ המשפט  $A_i = e_i(A_{i-1}) = E_i A_{i-1}$  משום כך

$$B = A_s = E_s \cdots E_1 A_0 = E_s \cdots E_1 A$$

ב  $\Leftarrow$  א: נתון כי  $B = E_s \cdots E_2 E_1 A$  תהי  $e_i$  הפעולה האלמנטרית כך ש-  $E_i = e_i(I_{m \times m})$ . אז ע"פ המשפט המטריצות  $A_i := E_i \cdots E_2 E_1 A$  מקיימות  $A_i = e_i(A_{i-1})$ , ולכן

$$B = e_s(\cdots e_2(e_1(A)) \cdots)$$

משי"ל.

### מטריצות הפיכות

**טענה 5.** נתונה מטריצה  $A \in M_{n \times n}(F)$ . אם שתי המטריצות  $B, C \in M_{n \times n}(F)$  מקיימות  $AB = BA = I_{n \times n}$  וגם  $AC = CA = I_{n \times n}$  אז בהכרח  $B = C$ .

**הוכחה.** לפי הטריק המוכר:

$$B = I_{n \times n}B = (CA)B = C(AB) = CI_{n \times n} = C$$

מש"ל.

**הגדרה 3.** מטריצה  $A$  מגודל  $n \times n$  מעל שדה  $F$  תיקרא **הפיכה** אם קיימת מטריצה  $B$  מאותו גודל מעל  $F$  כך ש-  $AB = BA = I_{n \times n}$ . המטריצה  $B$  תיקרא **ההופכית** של  $A$ , והיא תסומן  $A^{-1}$ .

בהמשך לרוב נקצר ונרשום  $I$  במקום  $I_{n \times n}$ , כאשר גודל המטריצה ברור מן ההקשר.

### טענה 6.

א. אם  $A$  הפיכה אז גם  $A^{-1}$  הפיכה, ומתקיים  $(A^{-1})^{-1} = A$ .  
 ב. אם  $A, B \in M_{n \times n}(F)$  הפיכות אז גם  $AB$  הפיכה, ומתקיים  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**הוכחה.** א. מייד.

ב. החישובים הם

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ג

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = A^{-1}A = I$$

מש"ל.

כיצד נוהה אם מטריצה  $A$  היא הפיכה? איך מחשבים את  $A^{-1}$ ? אחת הדרכים היא בעזרת דרוג.

**טענה 7.** מטריצה אלמנטרית  $E$  היא הפיכה, וגם  $E^{-1}$  היא אלמנטרית.

**הוכחה.** נניח ש-  $E = e(I_{n \times n})$ . תהי  $f$  הפעולה האלמנטרית ההפוכה ל-  $e$ , ונגדיר  $F := f(I_{n \times n})$ . אז ע"פ משפט 1, עם  $I := I_{n \times n}$ , מתקיים

$$EF = EFI = e(f(I)) = I$$

ג

$$FE = FEI = f(e(I)) = I$$

מש"ל.

**משפט 2.** התנאים הבאים שקולים עבור מטריצה  $A \in M_{n \times n}(F)$ .

- המטריצה  $A$  הפיכה.
- למשוואה  $AX = O$  אין פתרון לא טריוויאלי ב-  $F^n$ .
- המטריצה  $A$  שקולת שורה ל-  $I_{n \times n}$ .
- המטריצה  $A$  היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

**הוכחה.** א  $\Leftarrow$  ב: נניח כי  $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in F^n$  פתרון של  $AX = O$ . ידוע כי  $A$  הפיכה, לכן קיימת המטריצה ההופכית  $A^{-1}$ . אז

$$C = IC = (A^{-1}A)C = A^{-1}(AC) = A^{-1}O = O$$

ב  $\Leftarrow$  ג: תהי  $A'$  מטריצה מדורגת קאנונית שקולת שורה ל- $A$ . מאחר שאין פתרון לא טריוויאלי ל- $AX = O$  הרי אין משתנים חופשיים ב- $A'$ . לכן יש  $n-1$  מובילים במטריצה  $A'$  ו- $A' = I$ .

ג  $\Leftarrow$  ד: תהי

$$A = A_0 \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 \xrightarrow{e_3} \dots \xrightarrow{e_s} A_s = I$$

סדרת פעולות שורה אלמנטריות. נגדיר  $E_i := e_i(I)$ . ע"פ משפט 1 ידוע ש- $I = E_s \dots E_1 A$ . לכן בעזרת טענה 7 אנו מקבלים

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_s^{-1} I = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_s^{-1}$$

וכל המטריצות  $E_i^{-1}$  הן אלמנטריות.

מש"ל.

ד  $\Leftarrow$  א: נובע מטענות 7 ו-6 (ב).

מן המשפט הקודם אפשר לקבל שיטה לחישוב המטריצה ההופכית. בהוכחה של "ג  $\Leftarrow$  ד" מקבלים את הנוסחה

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_s^{-1}$$

משום כך

$$A^{-1} = E_s \dots E_2 E_1 = e_s(\dots e_2(e_1(I)) \dots)$$

**אלגוריתם 1. (חישוב מטריצה הופכית)** נתונה מטריצה  $A$  מגודל  $n \times n$  מעל שדה  $F$ .

1. נדרג את  $A$  ע"י סדרת פעולות שורה אלמנטריות  $e_1, \dots, e_s$  לקבלת מטריצה מדורגת קאנונית

$$A' = e_s(\dots e_1(A) \dots)$$

2. אם  $A' \neq I_{n \times n}$  אז  $A$  איננה הפיכה.

3. אם  $A' = I_{n \times n}$  אז  $A$  הפיכה ו- $A^{-1} = e_s(\dots e_1(I) \dots)$ .

**דוגמה 8.** ננסה להפוך את המטריצה  $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ . אנו נפעיל את פעולות השורה

בו־זמנית על  $A$  ועל  $I$ .

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{e_1=(L_2-3L_1 \rightarrow L_2)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{e_2=(-\frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_2)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \\ \xrightarrow{e_3=(L_1-2L_2 \rightarrow L_1)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \end{array}$$

קיבלנו  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$   
 רצוי לבדוק את התוצאה.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ו-

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

הערה: מטעמי חיסכון בעבודה לעתים רצוי להשאיר את "אנטי-דרוג" המטריצה  $I$  עד לשלב בו  $A$  דורגה...

### משוואות ליניאריות במטריצות

**טענה 8.** תהייה  $A \in M_{m \times n}(F)$  ו-  $D \in M_{n \times p}(F)$ . נרשום  $D = [D_1, \dots, D_p]$ , כלומר  $D_i$  היא עמודה  $i$  של  $D$ . אז

$$AD = [AD_1, \dots, AD_p]$$

מש"ל.

הוכחה. כמו טענה 4.

**דוגמה 9.** נתונה המשוואה

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

כאשר  $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$  משתנה המקבל ערכים ב-  $M_{3 \times 2}(\mathbb{Q})$ . כיצד פותרים את המשוואה?

נשתמש בטענה 8 לפתרון הבעיה. ע"פ הטענה המשוואה המטריציאלית  $(*)$  שקולה למערכת המשוואות הוקטוריות

$$(**) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} X_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} X_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} \end{cases}$$

כאשר  $X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$  ו-  $X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}$  משתנים המקבלים ערכים ב-  $\mathbb{Q}^3$ . הפתרון עכשיו מוכר. נשים

לב שניתן בבת אחת לדרג את המטריצה המורחבת בגודל  $3 \times 5$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 10 & 11 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -\frac{20}{3} & -\frac{23}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{22}{3} & \frac{25}{3} \end{array} \right]$$



תחילה נפתור עבור המשתנה הוקטורי  $X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$ . יש משתנה סקלרי חופשי אחד  $x_{31}$ . קבוצת הפתרונות היא

$$\cdot \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{20}{3} \\ \frac{22}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c_1 \in \mathbb{Q} \right\}$$

כעת נפתור עבור  $X_2$ . המשתנה החופשי הוא  $x_{32}$ . הפתרונות ההומוגניים הם ללא שינוי, אבל הפתרון המסוים אחר:

$$\cdot \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{23}{3} \\ \frac{25}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c_2 \in \mathbb{Q} \right\}$$

לסיום קבוצת הפתרונות למשוואה (\*) היא

$$\cdot \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{20}{3} & -\frac{23}{3} \\ \frac{22}{3} & \frac{25}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -2c_1 & -2c_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{Q} \right\}$$

#### דוגמה 10. נתונה המשוואה

$$AX + B = C$$

עבור מטריצות  $A \in M_{m \times m}(F)$  ו-  $B, C \in M_{m \times n}(F)$ . המשתנה  $X$  מקבל ערכים ב-  $M_{m \times n}(F)$ . ידוע ש-  $A$  הפיכה. אז יש פתרון יחיד למשוואה והוא

$$X := A^{-1}(C - B)$$

### מרחב העמודות והגרעין של מטריצה

**הגדרה 4.** תהי  $A \in M_{m \times n}(F)$ . מרחב הפתרונות ב-  $F^n$  של המשוואה ההומוגנית  $AX = O$  הוא תת מרחב של  $F^n$ . אנו נקרא למרחב זה בשם **הגרעין** של  $A$  ונסמן אותו  $\text{Ker}(A)$ .

**הגדרה 5.** תהי  $A \in M_{m \times n}(F)$ . **מרחב העמודות** של  $A$  הוא המרחב הנפרש ע"י עמודותיה של  $A$ . זהו תת מרחב של  $F^m$  אשר נסמנו ב-  $\text{Im}(A)$ . שם אחר למרחב העמודות הוא **התמונה של  $A$** .

בצורה אחרת,

$$\text{Ker}(A) = \{v \in F^n \mid Av = \vec{0}\}$$

ו-

$$\cdot \text{Im}(A) = \{Av \mid v \in F^n\}$$

נוכיר כי הדרגה  $\text{rank}(A')$  של מטריצה מדורגת קאנונית  $A'$  הוא מספר ה-1 ים המובילים.

**משפט 3.** תהי  $A \in M_{m \times n}(F)$ , ותהי  $A'$  מטריצה מדורגת קאנונית שקולת שורה ל- $A$  עם דרגה  $\text{rank}(A') = r$ .

$$\dim(\text{Im}(A)) = r$$

ר

$$\dim(\text{Ker}(A)) = n - r$$

**הוכחה.** בפתרון מערכת המשוואות ההומוגנית  $AX = O$  אנו מוצאים בסיס סדור  $(w_1, \dots, w_{n-r})$  למרחב הפתרונות, בהתאמה עם המשתנים החפשיים  $x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}$ . ראה משפט 5 בפרק ג'. אנו מסיקים ש- $\dim(\text{Ker}(A)) = n - r$ .  
 כעת יהיו  $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$  המשתנים התלויים ותהיינה  $v_1, \dots, v_n$  העמודות של  $A$ . משפט 4 בפרק ג' אומר שסדרת העמודות  $(v_{k_1}, \dots, v_{k_r})$  היא בסיס סדור של  $\text{Im}(A)$ . לכן  $\dim(\text{Im}(A)) = r$ . מש"ל.

**הערה.** בדרך כלל  $\text{Im}(A') \neq \text{Im}(A)$ , כלומר מרחב העמודות איננו נשמר ע"י פעולות שורה!

כעת ניתן להגדיר דרגה של מטריצה כלשהי, באופן שמתיישב עם ההגדרה הקודמת עבור מטריצה מדורגת קאנונית.

**הגדרה 6.** תהי  $A \in M_{m \times n}(F)$ . הדרגה של  $A$  היא

$$\text{rank}(A) := \dim(\text{Im}(A))$$

בעזרת המושג של דרגה ניתן לאפיין מטריצה הפיכה בצורות נוספות.

**משפט 4.** תהי  $A \in M_{n \times n}(F)$ . התנאים הבאים שקולים.

- א.  $A$  מטריצה הפיכה.
- ב. קיימת מטריצה  $B \in M_{n \times n}(F)$  כך ש- $AB = I_{n \times n}$ .
- ג. לכל  $v \in F^n$  קיים פתרון ב- $F^n$  למשוואה  $AX = v$ .
- ד. הדרגה של  $A$  היא  $n$ .
- ה. למשוואה  $AX = O$  אין פתרון לא טריוויאלי ב- $F^n$ .

**הוכחה.** א  $\Leftrightarrow$  ב: ניקח  $B := A^{-1}$ .

ב  $\Leftrightarrow$  ג: הוקטור  $w := Bv$  מקיים

$$Aw = ABv = I_{n \times n}v = v$$

ג  $\Leftrightarrow$  ד: מתנאי ג' נובע שכל וקטור  $v \in F^n$  הוא צרף ליניארי של העמודות של  $A$ , כלומר  $\text{Im}(A) = F^n$  לכן

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = n$$

ד  $\Leftrightarrow$  ה: תהיינה  $v_1, \dots, v_n$  העמודות של  $A$ . מאחר ש- $\text{rank}(A) = n$  הרי

$$\text{Sp}(v_1, \dots, v_n) = \text{Im}(A) = F^n$$

יוצא שהסדרה  $(v_1, \dots, v_n)$  היא בסיס סדור של

$F^n$ , ובפרט היא בלתי תלויה ליניארית. לכן הפתרון היחיד למשוואה  $AX = O$  הוא הפתרון הטריבויאלי.

ה  $\Leftarrow$  א: זה במשפט 2 בפרק זה. מש"ל.

**הגדרה 7.** תהי  $A$  מטריצה מגודל  $m \times n$  מעל השדה  $F$ . **מרחב השורות** של  $A$  הוא תת המרחב של  $M_{n \times n}(F)$  הנפרש ע"י השורות של  $A$ .

**משפט 5.** מימד מרחב השורות של מטריצה  $A$  שווה לדרגה שלה.

**הוכחה.** קל לראות כי פעולות שורה אלמנטריות אינן משנות את מרחב השורות. תהי  $A'$  מטריצה מדורגת קאנונית שקולת שורה ל- $A$ . אז מרחבי השורות של שתי המטריצות הם שווים; נקרא למרחב זה  $W$ . לפי משפט 3 ב- $A'$  יש  $r$  שורות שונות מאפס, כאשר  $r := \text{rank}(A)$ . בשל המיקום של ה-1 המובילים בשורות של  $A'$  שורות אלו מהוות סדרה בלתי תלויה ליניארית, כלומר בסיס סדור של  $W$ . מש"ל.

## ה. דטרמיננטות

בשיעורים הבאים נלמד על פונקציה חשובה מאוד הנקראת **הדטרמיננטה**. בעצם המדובר באוסף של פונקציות

$$\det : M_{n \times n}(F) \rightarrow F$$

כאשר  $n$  הוא מספר שלם חיובי כלשהו. נתחיל במקרים  $n = 1, 2$ .

**דוגמה 1.** עבור  $n = 1$  מגדירים  $a := \det([a])$ .

**דוגמה 2.** עבור  $n = 2$  נרשום  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . במקרה זה ההגדרה היא

$$\det(A) := ad - bc.$$

**טענה 1.** תהי  $A \in M_{2 \times 2}(F)$ . המטריצה  $A$  היא הפיכה אם  $\det(A) \neq 0$ .

**הוכחה.** נסמן  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ו-  $u := \det(A)$ . נגדיר מטריצה  $B := \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ . חישוב קצר מראה כי

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = uI$$

א. אם  $u \neq 0$  אז  $A(u^{-1}B) = I$ , ולכן  $A$  הפיכה ע"פ משפט 4 בפרק ד'.  
 ב. אם  $u = 0$  נבחין בין שני מקרים. אם  $A = O$  אז ברור ש-  $A$  איננה הפיכה. אם  $A \neq O$  אז גם  $B \neq O$ . נסמן  $B = [B_1, B_2]$  אז

$$[AB_1, AB_2] = AB = uI = O,$$

ולכן  $AB_1 = AB_2 = O$ . מאחר שלפחות אחת מן העמודות  $B_1$  או  $B_2$  שונה מאפס הרי  $A$  איננה הפיכה.

מש"ל.

אנו מסיקים:

**מסקנה 1.** אם  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  הפיכה אז

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**הגדרה 1.** תהי  $A$  מטריצה מגודל  $n \times n$  מעל  $F$  כאשר  $n \geq 2$ . המינור ה-  $(i, j)$  של  $A$  הוא המטריצה  $M_{ij}$  מגודל  $(n-1) \times (n-1)$  המתקבלת מ-  $A$  ע"י השמטת שורה  $i$  ועמודה  $j$ .

$$\text{דוגמה 3.} \text{ ניקח } n := 3 \text{ ו- } A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ אז } M_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ ו- } M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

**הגדרה 2.** תהי  $A$  מטריצה בגודל  $n \times n$  מעל השדה  $F$ . נגדיר את **הדטרמיננטה**  $\det(A) \in F$  ברקורסיה על  $n$ .

- עבור  $n = 1$  המטריצה היא  $A := [a]$  ומגדירים  $\det(A) := a$ .
- עבור  $n > 1$  נרשום  $A = [a_{ij}]$ , ויהי  $M_{ij}$  המינור ה- $(i, j)$  של  $A$ . אז

$$\det(A) := \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j})$$

**דוגמה 4.** נשווה את ההגדרה האחרונה לדוגמאות 1 ו-2. המקרה  $n = 1$  ברור. כעת ניקח  $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  אז  $M_{12} = [c]$ ,  $M_{11} = [d]$  ולכן  $\det(M_{12}) = c$  ו- $\det(M_{11}) = d$ . מקבלים

$$\det(A) = a \cdot \det([d]) - b \cdot \det([c]) = ad - bc$$

עכשיו נלמד כמה תכונות של הדטרמיננטה. את הוכחות ניתן למצוא בספרים רבים, למשל "אלגברה ליניארית" של ברמן וקון, פרק V; או בספר של Hoffman and Kunze.

**משפט 1. (פיתוח לפי שורה  $i$ )** נתונה מטריצה  $A = [a_{ij}]$  מגודל  $n \times n$  מעל השדה  $F$ . אז לכל  $i$  מתקיים

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

נשים לב שהגדרה 2 היא פיתוח לפי שורה 1.

**דוגמה 5.** ניקח את המטריצה  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  מעל השדה  $\mathbb{Q}$ . פיתוח לפי שורה 2 של  $\det(A)$  נותן

$$. 0 + 0 + (-1)^5 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right) = 3$$

פיתוח לפי שורה 1 נותן

$$. 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right) - 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right) + 3 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right) = -5 - 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 0 = 3$$

**דוגמה 6.** נניח כי  $A$  מטריצה משולשית עליונה, זאת אומרת

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

כאשר \* מייצג סקלר כלשהו. נראה ש-

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

כלומר מכפלת אברי האלכסון. נעשה זאת באינדוקציה על  $n$ . עבור  $n = 1$  זה ברור. עבור  $n > 1$  נשתמש בפיתוח לפי שורה  $n$ :

$$\det(A) = 0 + \dots + 0 + (-1)^{2n}a_{nn} \cdot \det(M_{nn}) = a_{nn} \cdot \det(M_{nn})$$

אולם גם המינור  $M_{nn}$  הוא מטריצה משולשית עליונה, ולכן

$$\det(M_{nn}) = a_{11} \cdots a_{n-1,n-1}$$

**משפט 2. (פיתוח לפי עמודה  $j$ )** נתונה מטריצה  $A = [a_{ij}]$  מגודל  $n \times n$  מעל השדה  $F$ . אז לכל  $j$  מתקיים

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

**משפט 3. (ליניאריות בעמודה  $j$ )** בהנתן עמודות

$$A_1, \dots, A_{j-1}, B, C, A_{j+1}, \dots, A_n \in F^n$$

וסקלר  $d$  מתקיימים

$$\begin{aligned} \det([A_1, \dots, A_{j-1}, B + C, A_{j+1}, \dots, A_n]) \\ = \det([A_1, \dots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \dots, A_n]) \\ + \det([A_1, \dots, A_{j-1}, C, A_{j+1}, \dots, A_n]) \end{aligned}$$

־

$$\begin{aligned} \det([A_1, \dots, A_{j-1}, d \cdot B, A_{j+1}, \dots, A_n]) \\ = d \cdot \det([A_1, \dots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \dots, A_n]) \end{aligned}$$

**דוגמה 7.** נניח שעמודה  $j$  של המטריצה  $A$  היא אפס. מהי הדטרמיננטה? ניקח  $B = C := \vec{0} \in F^n$ . אז כמובן גם  $B + C = \vec{0}$ . לפי משפט 3 מקבלים

$$\det(A) = \det(A) + \det(A)$$

$$\det(A) = 0$$

**הגדרה 3.** תהי  $A = [a_{ij}]$  מטריצה מטריצה מגודל  $m \times n$ . **המטריצה המוחלפת**  $A^t$  היא המטריצה מגודל  $n \times m$  אשר לכל  $(i, j)$  הרכיב ה־  $(j, i)$  שלה הוא  $a_{ji}$ .

**דוגמה 8.** ניקח  $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ . כאן  $F = \mathbb{Q}$  ו- $m = n = 2$ . המטריצה המוחלפת היא  $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ .

**משפט 4. (מטריצה מוחלפת)** הדטרמיננטה של מטריצה מוחלפת לא משתנה:

$$\det(A^t) = \det(A)$$

**דוגמה 9.** נניח ששורה  $i$  של המטריצה  $A$  היא אפס. מהי הדטרמיננטה? נתבונן במטריצה המוחלפת  $A^t$ . מאחר שבמטריצה זו עמודה מס'  $i$  היא אפס ידוע ש- $\det(A^t) = 0$ . כעת לפי משפט 4 מקבלים  $\det(A) = 0$ .

**משפט 5. (פעולות שורה אלמנטריות)** תהי  $A$  מטריצה ריבועית ו- $e$  פעולת שורה אלמנטרית.

- (1) אם  $e = (cL_i \rightarrow L_i)$  אז  $\det(e(A)) = c \cdot \det(A)$
- (2) אם  $e = (L_i + cL_j \rightarrow L_i)$ , כאשר  $i \neq j$ , אז  $\det(e(A)) = \det(A)$
- (3) אם  $e = (L_i \leftrightarrow L_j)$ , כאשר  $i \neq j$ , אז  $\det(e(A)) = -\det(A)$

**דוגמה 10.** תהי  $A$  מטריצה מגודל  $n \times n$ . יהיו  $i$  ו- $j$  שני אינדקסים שונים, ונניח כי העמודות מס'  $i$  ו- $j$  במטריצה  $A$  שוות. מהי  $\det(A)$ ? נגדיר  $B := A^t$ . לפי משפט 4 ידוע כי  $\det(A) = \det(B)$ . במטריצה  $B$  השורות מס'  $i$  ו- $j$  שוות. נפעיל את פעולת השורה  $e = (L_i - L_j \rightarrow L_i)$  על  $B$ . לפי משפט 5 מקבלים  $\det(B) = \det(e(B))$ . אבל במטריצה  $e(B)$  שורה מס'  $i$  היא אפס, ולכן  $\det(e(B)) = 0$ . לסיכום קיבלנו  $\det(A) = 0$ .

**דוגמה 11.** הרי דרך לחישוב דטרמיננטות בעזרת דרוג. ניקח

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$$

נפעיל על  $A$  את תהליך הדרוג ונרשום את הפעולות האלמנטריות.

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} & \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 11 & 11 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{11}L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{L_3 - 7L_2 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = B
 \end{aligned}$$

ע"פ משפט 5 ידוע לנו ש-

$$\det(B) = 1 \cdot \frac{1}{11} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \det(A)$$

מצד שני מאחר ש- $B$  מטריצה משולשת מקבלים  $\det(B) = -2$ . לכן  $\det(A) = 22$ .

**משפט 6. (כפל מטריצות)** בהנתן מטריצות ריבועיות  $A$  ו- $B$  מגודל  $n \times n$  מתקיים

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

**משפט 7.** תהי  $A$  מטריצה ריבועית מעל שדה  $F$ . אז  $A$  הפיכה אם ורק אם  $\det(A) \neq 0$ .

**הוכחה.** אנו נוכיח את המשפט בעזרת התוצאות שציטטנו בלא הוכחה קודם.

א. נניח כי  $A$  הפיכה. אז  $AA^{-1} = I$ . ע"פ משפט 6 מקבלים

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I)$$

מאחר ש- $I$  מטריצה משולשית, עם 1 על האלכסון, הרי  $\det(I) = 1$ . לכן  $\det(A) \neq 0$ .

ב. נניח  $\det(A) \neq 0$ . תהי  $A'$  מטריצה מדורגת קאנונית אשר מתקבלת מ- $A$  ע"י סדרת פעולות שורה אלמנטריות

$$A = A_0 \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_s} A_s = A'$$

על פי משפט 5 יש סקלרים  $c_1, \dots, c_s \neq 0$  כך ש-

$$\det(A') = c_s \cdots c_1 \cdot \det(A)$$

לכן  $\det(A') \neq 0$ . מאחר שכך השורה התחתונה של  $A'$  חייבת להיות שונה מאפס. זה מחייב שבכל שורה של  $A'$  יש 1 מוביל. רואים ש- $A' = I_{n \times n}$ . ע"פ משפט 2 בפרק ד' המטריצה  $A$  היא הפיכה. מש"ל.

## כלל קרמר

ידוע לנו שאם  $A \in M_{n \times n}(F)$  הפיכה אז למשוואה  $AX = B$  תמיד יש פתרון יחיד ב- $F^n$ . כמוכן הפתרון הוא  $X := A^{-1}B$ . להלן נוסחה לפתרון המשתמשת בדטרמיננטות.

**משפט 8. (כלל קרמר)** תהי  $A \in M_{n \times n}(F)$  מטריצה הפיכה שעמודותיה  $A_1, \dots, A_n$ . בהנתן וקטור  $B \in F^n$  נגדיר מטריצות

$$\tilde{B}_j := [A_1, \dots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \dots, A_n]$$

$$\text{עבור } j = 1, \dots, n \text{ אז הפתרון } A^{-1}B = D = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \text{ למשוואה } AX = B \text{ מקיים:}$$

$$d_j = \frac{\det(\tilde{B}_j)}{\det(A)}$$

**הוכחה.** על פי דוגמה 10 אנו יודעים כי

$$\det([A_1, \dots, A_{j-1}, A_l, A_{j+1}, \dots, A_n]) = \begin{cases} \det(A); & l = j \\ 0; & \text{אחרת} \end{cases}$$



מאחר ש-

$$B = AD = \sum_{l=1}^n d_l A_l$$

ותוך שימוש במשפט 3 אני מסיקים

$$\begin{aligned} \det(\tilde{B}_j) &= \det([A_1, \dots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \dots, A_n]) \\ &= \det([A_1, \dots, A_{j-1}, (\sum_{l=1}^n d_l A_l), A_{j+1}, \dots, A_n]) \\ &= \sum_{l=1}^n d_l \cdot \det([A_1, \dots, A_{j-1}, A_l, A_{j+1}, \dots, A_n]) \\ &= d_j \cdot \det(A) \end{aligned}$$

אבל  $\det(A) \neq 0$  ועי"י חלוקה מקבלים

$$. d_j = \det(\tilde{B}_j) \cdot \det(A)^{-1}$$

מש"ל.

## ו. טרנספורמציות ליניאריות

נתחיל בתזכורת על פונקציות. תהיינה  $X$  ו- $Y$  שתי קבוצות. פונקציה  $f : X \rightarrow Y$  היא כלל המתאים לכל איבר  $x \in X$  איבר יחיד  $f(x) \in Y$ . הקבוצה  $X$  נקראת התחום של  $f$  והקבוצה  $Y$  נקראת הטווח. הפונקציה  $f$  היא חד-חד-ערכית (חח"ע) אם לכל שני איברים שונים  $x_1, x_2 \in X$  מתקיים  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . הפונקציה  $f$  היא על אם לכל  $y \in Y$  קיים  $x \in X$  כך ש- $y = f(x)$ . התמונה של  $f$  היא הקבוצה

$$\text{Im}(f) := \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$

נשים לב כי  $f$  היא על אם  $\text{Im}(f) = Y$ . בהנתן פונקציות  $f : X \rightarrow Y$  ו- $g : Y \rightarrow Z$  ניתן להרכיב אותן לקבלת הפונקציה  $g \circ f : X \rightarrow Z$ . הכלל הוא  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ . פונקציה  $f : X \rightarrow Y$  נקראת הפיכה אם ישנה פונקציה  $g : Y \rightarrow X$  כך ש- $(g \circ f)(x) = x$  ו- $(f \circ g)(y) = y$  לכל  $x \in X$  ו- $y \in Y$ . אם ישנה כזו  $g$  אז היא יחידה, היא נקראת הפונקציה ההפכית של  $f$ , ומסומנת ב- $f^{-1}$ . ידוע כי הפיכה אם"ם היא חח"ע ועל.

**הגדרה 1.** יהיו  $V$  ו- $W$  מרחבים וקטוריים מעל שדה  $F$ . טרנספורמציה ליניארית היא פונקציה  $T : V \rightarrow W$  המקיימת את התנאים הבאים:

$$\text{א. } T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \text{ לכל } v_1, v_2 \in V$$

$$\text{ב. } T(av) = aT(v) \text{ לכל } v \in V \text{ ו-} a \in F$$

כאשר  $V = W$  בדרך כלל קוראים ל- $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי.

**דוגמה 1.**  $V = W$  ו- $I : V \rightarrow V$  היא פונקצית הזהות  $I(v) = v$ . זו טרנספורמציה ליניארית.

**דוגמה 2.**  $O : V \rightarrow W$  היא פונקצית האפס  $O(v) = \vec{0}$ . זו טרנספורמציה ליניארית.

**דוגמה 3.**  $V := F^n, W := F^m$  ו- $A \in M_{m \times n}(F)$ . נגדיר  $T : V \rightarrow W$  ע"י  $T(v) := Av$ . אז

$$T(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = T(v_1) + T(v_2)$$

ו-

$$T(av) = A(av) = aAv = aT(v)$$

רואים שזו טרנספורמציה ליניארית.

**דוגמה 4.**  $F := \mathbb{R}$  ו- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  היא הפונקציה

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} a^3 \\ b \end{bmatrix}$$

זו איננה טרנספורמציה ליניארית משום שלדוגמה

$$T\left(2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

**דוגמה 5.** בהנתן פולינום  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  עם מקדמים ממשיים נגדיר את הנגזרת שלו להיות הפולינום

$$\frac{dp}{dx} := a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

כמובן שהגדרה זו מתלכדת עם הגדרת הנגזרת של הפונקציה  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  שלומדים בקורס חדו"א. כעת נתבונן במרחב הפולינומים  $\mathbb{R}[x]$  מעל השדה  $\mathbb{R}$ . מקבלים פונקציה  $D : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  עם הנוסחה

$$. D(p) := \frac{dp}{dx}$$

כפי שידוע לנו מחשבון דיפרנציאלי, וניתן לבדוק גם ישירות מההגדרה, לכל שני פולינומים  $p$  ו- $q$  ולכל סקלר  $c$  מתקיים:

$$D(p + q) = D(p) + D(q)$$

ו-

$$. D(cp) = cD(p)$$

לכן  $D$  הוא אופרטור ליניארי, אשר נקרא אופרטור הגזירה.

**דוגמה 6.** שוב השדה הוא  $\mathbb{R}$ , אבל המרחב הוא

$$. V := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ פונקציות רציפות}\}$$

לכל פונקציה  $f \in V$  נגדיר פונקציה  $T(f)$  ע"י:

$$. T(f)(x) := \int_0^x f(t) dt$$

לפי הידוע מחשבון דיפרנציאלי הפונקציה  $T(f)$  גם היא רציפה, ומתקיים:

$$T(f + g)(x) = \int_0^x (f(t) + g(t)) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt = T(f)(x) + T(g)(x)$$

ו-

$$T(cf)(x) = \int_0^x cf(t) dt = c \int_0^x f(t) dt = cT(f)(x)$$

לכל שתי פונקציות  $f, g \in V$  ולכל סקלר  $c$ . לכן

$$T(f + g) = T(f) + T(g)$$

ו-

$$, T(cf) = cT(f)$$

כלומר  $T$  אופרטור ליניארי.

**דוגמה 7.** כעת לדוגמה גיאומטרית. השדה הוא  $\mathbb{R}$  והמרחב הוא  $\mathbb{R}^2$ . תהי

$$. A := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

נגדיר אופרטור  $T : V \rightarrow V$  ע"י הנוסחה  $T(v) := Av$ . מהי המשמעות הגיאומטרית של  $T$ ? כדי להבין זאת נכליל את הדוגמה קצת. בהנתן מספר ממשי  $\theta$  נגדיר מטריצה

$$A_\theta := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

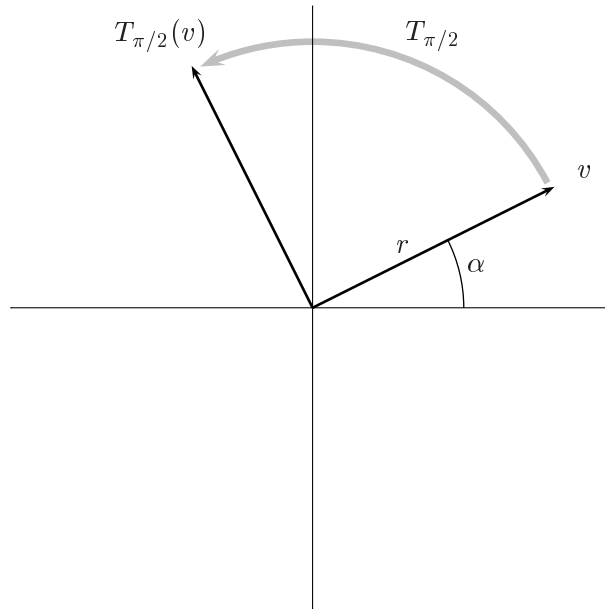
ואופרטור  $T_\theta : V \rightarrow V$  ע"י הנוסחה  $T_\theta(v) := A_\theta v$ . נרשום את הוקטור  $v$  בקואורדינטות קוטביות:

$$v = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha) \\ r \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

כאשר  $r$  הוא המרחק מהראשית ו- $\alpha$  היא הזווית מהציר האופקי. נקבל

$$\begin{aligned} T_\theta(v) &= A_\theta v \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos(\alpha) \\ r \sin(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r(\cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha)) \\ r(\sin(\theta)\cos(\alpha) + \cos(\theta)\sin(\alpha)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(השתמשנו כאן בזהויות טריגונומטריות). המסקנה היא ש- $T_\theta$  היא סיבוב בזווית  $\theta$ . בפרט האופרטור שהתחלנו איתו  $T = T_{\pi/2}$  הינה סיבוב בזווית של  $\pi/2$ .



**הגדרה 2.** תהי  $T : V \rightarrow W$  טרנספורמציה ליניארית. הגרעין של הטרנספורמציה  $T$  הוא הקבוצה

$$\text{Ker}(T) := \{v \in V \mid T(v) = \vec{0}\} \subset V$$

התמונה של הטרנספורמציה  $T$  היא הקבוצה

$$\text{Im}(T) := \{T(v) \mid v \in V\} \subset W$$

נשים לב שמושג התמונה מוגדר לכל פונקציה (ראה תחילת הפרק), אולם הגרעין מוגדר אך ורק לטרנספורמציה ליניארית.

**טענה 1.** תהי  $T : V \rightarrow W$  טרנספורמציה ליניארית.

א.  $\text{Ker}(T)$  הינו תת־מרחב של  $V$ .

ב.  $\text{Im}(T)$  הינו תת־מרחב של  $W$ .

**הוכחה.** א. נראה כי  $\vec{0} \in T$ :

$$T(\vec{0}) = T(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot T(\vec{0}) = \vec{0}$$

(ראה הערה אחרי ההוכחה.)

כעת יהיו  $v_1, v_2 \in \text{Ker}(T)$  ו-  $a \in F$  אז:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

ו-

$$T(a \cdot v_1) = a \cdot T(v_1) = a \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

כלומר  $v_1 + v_2 \in \text{Ker}(T)$  וגם  $a \cdot v_1 \in \text{Ker}(T)$  תת־מרחב של  $V$ .

ב. מאחר ש-  $\vec{0} = T(\vec{0}) \in \text{Im}(T)$  הרי  $\vec{0} \in \text{Im}(T)$ . כעת יהיו  $w_1, w_2 \in \text{Im}(T)$  ו-  $a \in F$ . לפי הגדרת  $\text{Im}(T)$  קיימים  $v_1, v_2 \in V$  כך ש-  $w_1 = T(v_1)$  ו-  $w_2 = T(v_2)$ . מקבלים

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

כלומר  $w_1 + w_2 \in \text{Im}(T)$  כמו כן

$$T(a \cdot v_1) = a \cdot T(v_1) = a \cdot w_1$$

כלומר  $a \cdot w_1 \in \text{Im}(T)$  לכן  $\text{Im}(T)$  תת־מרחב של  $W$ . מש"ל.

**הערה.** הסימן  $\vec{0}$  בהוכחה הקודמת מייצג שני וקטורים שונים: הן את  $\vec{0} \in V$  והן את  $\vec{0} \in W$ . יכולנו לבדל ביניהם ע"י כך שנכתוב  $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ , אולם זה מסורבל למדי ולא נעשה זאת.

**טענה 2.** טרנספורמציה ליניארית  $T : V \rightarrow W$  הינה חד־חד ערכית אם ורק אם  $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$ .

**הוכחה.** תחילה נניח כי  $T$  הינה חח"ע. מאחר ש-  $T(\vec{0}) = \vec{0}$  נובע כי

$$\text{Ker}(T) = \{v \mid T(v) = \vec{0}\} = \vec{0}$$

לכיוון השני, נניח כי  $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$ . יהיו  $v_1, v_2 \in V$  כך ש-  $T(v_1) = T(v_2)$ . אז מתקיים

$$T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = \vec{0}$$

ולכן  $v_1 - v_2 \in \text{Ker}(T)$ . מכאן נובע כי  $v_1 - v_2 = \vec{0}$  ו-  $v_1 = v_2$ . אם כן  $T$  חח"ע. מש"ל.

**טענה 3.** תהיינה  $S, T : V \rightarrow W$  טרנספורמציות ליניאריות. נגדיר פונקציה

$$S + T : V \rightarrow W$$

ע"י הנוסחה

$$(S + T)(v) := S(v) + T(v)$$

אז  $S + T$  היא טרנספורמציה ליניארית.

**הוכחה.** עבור  $v_1, v_2 \in V$  ו-  $a_1, a_2 \in F$  מקבלים

$$\begin{aligned} (S + T)(a_1 v_1 + a_2 v_2) &= S(a_1 v_1 + a_2 v_2) + T(a_1 v_1 + a_2 v_2) \\ &= a_1 S(v_1) + a_2 S(v_2) + a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) \\ &= a_1 (S(v_1) + T(v_1)) + a_2 (S(v_2) + T(v_2)) \\ &= a_1 (S + T)(v_1) + a_2 (S + T)(v_2) \end{aligned}$$

מש"ל.

**טענה 4.** תהיינה  $S : V \rightarrow W$  ו- $T : W \rightarrow U$  טרנספורמציות ליניאריות. אז ההרכבה

$$T \circ S : V \rightarrow U$$

היא טרנספורמציה ליניארית.

**הוכחה.** עבור  $v_1, v_2 \in V$  ו- $a_1, a_2 \in F$  מקבלים

$$\begin{aligned} (T \circ S)(a_1v_1 + a_2v_2) &= T(S(a_1v_1 + a_2v_2)) \\ &= T(a_1S(v_1) + a_2S(v_2)) \\ &= a_1T(S(v_1)) + a_2T(S(v_2)) \\ &= a_1(T \circ S)(v_1) + a_2(T \circ S)(v_2) \end{aligned}$$

מש"ל.

**טענה 5.** תהי  $T : V \rightarrow W$  טרנספורמציה ליניארית ו- $a \in F$ . נגדיר פונקציה

$$aT : V \rightarrow W$$

ע"י הנוסחה

$$(aT)(v) := a \cdot T(v)$$

אז  $aT$  היא טרנספורמציה ליניארית.

**הוכחה.** עבור  $v_1, v_2 \in V$  ו- $a_1, a_2 \in F$  מקבלים

$$\begin{aligned} (aT)(a_1v_1 + a_2v_2) &= a \cdot T(a_1v_1 + a_2v_2) \\ &= a \cdot (a_1T(v_1) + a_2T(v_2)) \\ &= a_1 \cdot (a \cdot T(v_1)) + a_2 \cdot (a \cdot T(v_2)) \\ &= a_1 \cdot (aT)(v_1) + a_2 \cdot (aT)(v_2) \end{aligned}$$

מש"ל.

**מסקנה 1.** יהי  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  פולינום עם מקדמים בשדה  $F$  ויהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי. נגדיר

$$T^i := \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_i$$

עבור  $0 < i$ ,  $T^0 := I$  ו-

$$f(T) := \sum_{i=0}^n a_i T^i$$

אז  $f(T) : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי.

**הוכחה.** בעזרת אינדוקציה על  $i$  וטענה 3 מקבלים ש- $T^i$  אופרטור ליניארי. לפי טענה 5 הפונקציה  $a_i T^i$  היא אופרטור ליניארי. לבסוף בעזרת אינדוקציה על  $n$  וטענה 4 מקבלים ש- $f(T)$  אופרטור ליניארי. מש"ל.

**הגדרה 3.** טרנספורמציה לינארית  $T : V \rightarrow W$  נקראת **איזומורפיזם ליניארי**, או **איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים**, אם היא חד-חד ערכית ועל.

**הגדרה 4.** שני מרחבים וקטוריים  $V$  ו- $W$  מעל שדה  $F$  נקראים **איזומורפיים** אם יש איזומורפיזם ליניארי  $T : V \rightarrow W$ .

**טענה 6.** יהי  $T : V \rightarrow W$  איזומורפיזם ליניארי. אז הפונקציה ההופכית  $T^{-1} : W \rightarrow V$  גם היא איזומורפיזם ליניארי.

**הוכחה.** ברור כי  $T^{-1}$  היא חח"ע ועל, בהיותה הפונקציה ההופכית של  $T$ . צריך להוכיח כי  $T^{-1}$  היא טרנספורמציה ליניארית. יהיו  $w_1, w_2 \in W$  ו- $c \in F$ . נגדיר  $v_i := T^{-1}(w_i) \in V$  עבור  $i = 1, 2$ . אז

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

נפעיל על משוואה זו ונקבל:

$$T^{-1}(w_1 + w_2) = T^{-1}(T(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$$

בדומה:

$$T^{-1}(cw_1) = T^{-1}(T(cv_1)) = cv_1 = cT^{-1}(w_1)$$

מש"ל.

**משפט 1.** יהי  $T : V \rightarrow W$  איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים, ותהי  $v = (v_1, \dots, v_n)$  סדרת וקטורים ב- $V$ . נגדיר  $w := (T(v_1), \dots, T(v_n))$ .

- א.  $v$  סדרה בת"ל א"ם  $w$  סדרה בת"ל.
- ב.  $v$  סדרה פורשת של  $V$  א"ם  $w$  סדרה פורשת של  $W$ .
- ג.  $v$  בסיס סדור של  $V$  א"ם  $w$  בסיס סדור של  $W$ .

**הוכחה.** א. נניח  $v$  בת"ל. יהיו  $a_1, \dots, a_n$  סקלרים כך ש- $\sum_{i=0}^n a_i w_i = \vec{0}$ . אז

$$\vec{0} = T^{-1}\left(\sum_{i=0}^n a_i w_i\right) = \sum_{i=0}^n a_i v_i$$

לכן  $a_1 = \dots = a_n = 0$ , ורואים ש- $w$  סדרה בת"ל. הכיוון השני מוכח בצורה בדומה.

ב. נניח ש- $v$  פורשת את  $W$ . יהי  $w \in W$  כלשהו. אז יש  $a_1, \dots, a_n \in F$  כך ש- $\sum_{i=0}^n a_i v_i = T^{-1}(w)$ . לכן

$$w = T\left(\sum_{i=0}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=0}^n a_i w_i$$

מכך מסיקים ש- $w$  פורשת את  $W$ . הכיוון השני בדומה.

מש"ל.

ג. צירוף של א' ו-ב'.

**מסקנה 2.** נניח  $V$  ו- $W$  הם שני מרחבים וקטוריים איזומורפיים מעל השדה  $F$ . אם  $\dim(V) = n < \infty$  אז גם  $\dim(W) = n$ .

**הוכחה.** ניקח בסיס סדור  $(v_1, \dots, v_n)$  של  $V$ . יהי  $T : V \rightarrow W$  איזומורפיזם. אז הסדרה  $(T(v_1), \dots, T(v_n))$  היא בסיס סדור של  $W$ . מש"ל.

יהי  $V$  מרחב וקטורי ממימד  $n$  מעל שדה  $F$ . נבחר בסיס סדור  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  ל- $V$ . ראינו כבר כי ניתן לייצג כל וקטור  $v \in V$  בצורה יחידה כצרוף ליניארי של איברי  $\mathbf{v}$ :

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

כאשר  $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ . לכן לכל וקטור  $v$  מתאים וקטור הקואורדינטות  $[v]_{\mathbf{v}} := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in F^n$ .

**משפט 2.** יהי  $\mathbf{v}$  בסיס סדור של המרחב הוקטורי ה- $n$  מימדי  $V$  מעל השדה  $F$ . הפונקציה  $T : V \rightarrow F^n$  המוגדרת ע"י הנוסחה

$$T(v) := [v]_{\mathbf{v}}$$

היא איזומורפיזם ליניארי.

**הוכחה.** (1) נראה כי  $T$  טרנספורמציה ליניארית. יהיו  $u, v \in V$  ו- $c \in F$ . נסמן את וקטורי הקואורדינטות ע"י

$$[u]_{\mathbf{v}} := \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{ו} \quad [v]_{\mathbf{v}} := \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

כלומר

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

ו-

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

אז

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + (b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) \\ &= (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_n + b_n) v_n \end{aligned}$$

ולכן

$$T(u + v) = [u + v]_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [u]_{\mathbf{v}} + [v]_{\mathbf{v}} = T(u) + T(v)$$

בדומה עבור כפל בסקלר:

$$cu = c(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = ca_1 v_1 + \dots + ca_n v_n$$

ולכן

$$T(cu) = [cu]_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = c[u]_{\mathbf{v}} = cT(u)$$



(2) בשלב זה נוכיח כי  $T$  היא חתייע ועל. בהנתן וקטור כלשהו  $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in F^n$  נתבונן בוקטור

$$. v := a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

אז

$$, T(v) = [v]_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

כלומר  $T$  היא על. לבסוף נניח  $T(v) = \vec{0}$ . זאת אומרת  $[v]_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ , ומשום כך

$$. v = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = \vec{0}$$

לפי טענה 2,  $T$  היא חתייע. מש"ל.

מהמשפט אשר הוכחנו נובעת מיד המסקנה הבאה:

**מסקנה 3.** כל מרחב וקטורי  $V$  ממימד  $n$  מעל השדה  $F$  איזומורפי למרחב  $F^n$ .

**דוגמה 8.** יהי  $V$  המרחב

$$. V := \{n \geq \text{מעלה } p(x) \text{ מעל } \mathbb{Q}\}$$

אז  $V$  הינו מרחב וקטורי עם בסיס סדור  $\mathbf{v} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ , ולכן  $V$  איזומורפי למרחב  $\mathbb{Q}^{n+1}$ .

**משפט 3.** יהיו  $V$  ו- $W$  מרחבים וקטוריים ממימדים סופיים מעל שדה  $F$ , ותהי  $T : V \rightarrow W$  טרנספורמציה ליניארית. אז

$$. \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$$

**הוכחה.** ניקח בסיס סדור  $(v_1, \dots, v_m)$  לתת-מרחב  $\text{Ker}(T)$  ונשלים אותו לבסיס סדור

$$(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$$

של  $V$ . עבור כל  $j$  בטווח  $m+1, \dots, n$  נגדיר  $w_j := T(v_j)$ . מספיק להוכיח כי הסדרה

$$\mathbf{w} := (w_{m+1}, \dots, w_n)$$

היא בסיס סדור של  $\text{Im}(T)$ , שהרי אז נקבל

$$. \dim(\text{Im}(T)) = n - m = \dim(V) - \dim(\text{Ker}(T))$$

א. נוכיח כי הסדרה  $\mathbf{w}$  פורשת את  $\text{Im}(T)$ . יהי  $w \in \text{Im}(T)$ . אז  $w = T(v)$  עבור איזה וקטור

$$. v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in V$$

אבל  $T(v_j) = 0$  לכל  $j \leq m$ , ולכן

$$w = T(v) = \sum_{j=1}^n a_j T(v_j) = \sum_{j=m+1}^n a_j T(v_j) = \sum_{j=m+1}^n a_j w_j$$

מצאנו כי  $\text{Im}(T) = \text{Sp}(w)$ .

ב. עתה נוכיח כי  $w$  סדרה בת"ל. יהיו  $a_{m+1}, \dots, a_n$  סקלרים כך ש-

$$\sum_{j=m+1}^n a_j w_j = \vec{0}$$

נגדיר

$$v := \sum_{j=m+1}^n a_j v_j \in V$$

אז

$$T(v) = \sum_{j=m+1}^n a_j w_j = \vec{0}$$

ולכן  $v \in \text{Ker}(T)$ . מאחר ש-  $\text{Ker}(T) = \text{Sp}(v_1, \dots, v_m)$  הרי ישנם סקלרים  $a_1, \dots, a_m$  כך ש-  $v = \sum_{j=1}^m a_j v_j$  מקבלים

$$\vec{0} = -v + v = \sum_{j=1}^m a_j v_j + \sum_{j=m+1}^n a_j v_j = \sum_{j=1}^n a_j v_j$$

אבל  $(v_1, \dots, v_n)$  בסיס סדור של  $V$  ומשום כך  $a_1 = \dots = a_n = 0$ . לכן  $w$  סדרה בת"ל. מש"ל.

**דוגמה 9.** ניקח  $V := F^n, W := F^m$ , ו-  $A \in M_{m \times n}(F)$ . נגדיר  $T : F^n \rightarrow F^m$  ע"י  $T(v) := Av$ . מספר המשתנים התלויים במערכת המשוואות  $AX = O$  הוא  $r = \dim(\text{Im}(A))$ , ומספר המשתנים החופשיים הוא  $n - r = \dim(\text{Ker}(A))$ . אכן רואים כי במקרה זה

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) = r + (n - r) = n = \dim(F^n)$$

### המטריצה של טרנספורמציה ביחס לבסיס סדור

יהיו  $V$  ו-  $W$  מרחבים וקטוריים ממימדים סופיים מעל שדה  $F$ , ונניח כי נתונים לנו בסיס סדור  $v = (v_1, \dots, v_n)$  של  $V$  ובסיס סדור  $w = (w_1, \dots, w_m)$  של  $W$ . תהי  $T : V \rightarrow W$  טרנספורמציה ליניארית. לכל אינדקס  $j$  הוקטור  $T(v_j) \in W$  ניתן לכתובה יחידה כצרוף ליניארי של איברי הבסיס הסדור  $w$ ; כלומר ישנם סקלרים  $a_{1j}, \dots, a_{mj}$  יחידים כך ש-

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

במלים אחרות

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = [T(v_j)]_w \in F^m$$

וקטור הקואורדינטות של  $T(v_j)$  בבסיס הסדור  $w$ .

**הגדרה 5.** המטריצה של הטרנספורמציה הליניארית  $T : V \rightarrow W$  ביחס לבסיסים הסדורים  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  של  $V$  ו-  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$  של  $W$  היא המטריצה

$$[T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(F)$$

כך ש-  $T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$  לכל  $j$ .

נשים לב כי עמודה  $j$  של המטריצה  $[T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$  היא בדיוק  $[T(v_j)]_{\mathbf{w}}$ , כלומר

$$[T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} = \left[ [T(v_1)]_{\mathbf{w}}, \dots, [T(v_n)]_{\mathbf{w}} \right]$$

**דוגמה 10.** ניקח את מרחבי העמודות  $V := F^n$  ו-  $W := F^m$ , ויהיו  $\mathbf{v}$  ו-  $\mathbf{w}$  הבסיסים הסטנדרטיים  $\mathbf{v} := (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  ו-  $\mathbf{w} := (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ . נשים לב שהסימן  $\vec{e}_i$  מתייחס הן לוקטור הסטנדרטי ה-  $i$  ב-  $F^n$  והן לזה שב-  $F^m$ , ונשתדל לא להתבלבל ביניהם. תהיה  $A \in M_{m \times n}(F)$  מטריצה. נגדיר כרגיל טרנספורמציה ליניארית  $T : V \rightarrow W$  ע"י הנוסחה  $T(v) := Av$ . אז

$$\begin{aligned} T(\vec{e}_j) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = a_{1j} \vec{e}_1 + \cdots + a_{mj} \vec{e}_m = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{e}_i \end{aligned}$$

כלומר

$$[T(\vec{e}_j)]_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

ואנו מסיקים כי

$$[T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} = A$$

נאמר את זה במלים: מטריצת הייצוג של  $T$  ביחס לבסיסים הסטנדרטיים היא המטריצה  $A$  שאיתה התחלנו.

**דוגמה 11.** יהי  $V$  המרחב הוקטורי

$$V := \{p(x) \text{ מעל } \mathbb{R} \text{ ממעלה } n \geq 0\}$$

עבור איזה  $n \geq 0$ , ויהי  $D : V \rightarrow V$  האופרטור הליניארי המוגדר ע"י הנוסחה  $D(p) := \frac{dp}{dx}$ . יהי  $\mathbf{v} = (x^0, x^1, \dots, x^n)$ , שהוא הבסיס הסטנדרטי של מרחב הפולינומים. לכל  $j \in \{1, \dots, n\}$  מקבלים  $D(x^j) = jx^{j-1}$ , וכן  $D(x^0) = \vec{0}$ . לכן המטריצה המייצגת היא

$$[D]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

כאשר האינדקסים בשורות ובעמודות רצים מ-0 עד  $n$ .

איך להשתמש במטריצת הייצוג  $[T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$ ? אנו נראה בהמשך שניתן להעזר במטריצת הייצוג לחישוב  $\text{Im}(T)$  ו-  $\text{Ker}(T)$ .

**משפט 4.** תהי  $T : V \rightarrow W$  טרנספורמציה ליניארית, יהי  $\mathbf{v}$  בסיס סדור ל-  $V$  ויהי  $\mathbf{w}$  בסיס סדור ל-  $W$ . אז לכל  $v \in V$  מתקיים

$$[T(v)]_{\mathbf{w}} = [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} \cdot [v]_{\mathbf{v}}$$

**הוכחה.** נרשום  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  ו-  $A = [a_{ij}] := [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$ . ניקח וקטור  $v \in V$  כלשהו, ונגדיר  $[v]_{\mathbf{v}} := \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ . עפ"י הגדרת  $[T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$  יש השוויון

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

לכן

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^n b_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n b_j T(v_j) = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_j\right) w_i$$

עתה נגדיר  $c_i := \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j$ . אז  $T(v) = \sum_{i=1}^m c_i w_i$ , ומכאן

$$[T(v)]_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

אולם מהגדרת כפל מטריצות מקבלים

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

מש"ל.

$$[T(v)]_{\mathbf{w}} = [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} \cdot [v]_{\mathbf{v}}$$

**מסקנה 4.** בתנאי משפט 4 נרשום  $A := [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$ .

א. יהי  $v \in V$  אז  $v \in \text{Ker}(T)$  אם ורק אם  $[v]_{\mathbf{v}} \in \text{Ker}(A)$  (מרחב הפתרונות של  $AX = \vec{0}$ ).

ב. יהי  $w \in W$  אז  $w \in \text{Im}(T)$  אם ורק אם  $[w]_{\mathbf{w}} \in \text{Im}(A)$  (מרחב העמודות של  $A$ ).

**הוכחה.** א.  $T(v) = 0$  אם ורק אם  $[T(v)]_{\mathbf{w}} = 0$  משום שהפונקציה  $w \mapsto [w]_{\mathbf{w}}$  היא איזומורפיזם  $W \rightarrow F^m$ . אולם עפ"י המשפט

$$[T(v)]_{\mathbf{w}} = [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} \cdot [v]_{\mathbf{v}}$$

א.  $\vec{0}$  הוא בדיק כאשר  $[v]_{\mathbf{v}} \in \text{Ker}(A)$  במרחב הפתרונות של המטריצה  $A := [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$ .

ב. נניח  $w \in \text{Im}(T)$ . אז יש  $v \in V$  כך ש-  $w = T(v)$ . עפ"י המשפט  $[w]_{\mathbf{w}} = [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} \cdot [v]_{\mathbf{v}}$ , ולכן  $[w]_{\mathbf{w}} \in \text{Im}(A)$  במרחב העמודות של המטריצה  $A := [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$ .

לכוון השני, נניח ש- $[w]_{\mathbf{w}}$  במרחב העמודות של המטריצה  $A$ . כלומר קיימת עמודה  $u \in F^n$  כך ש- $[w]_{\mathbf{w}} = [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} \cdot u$ . יהי  $v \in V$  הוקטור כך ש- $u = [v]_{\mathbf{v}}$ . אז עפ"י המשפט

$$[T(v)]_{\mathbf{w}} = [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} \cdot u = [w]_{\mathbf{w}}$$

מש"ל.

$$w = T(v)$$

**דוגמה 12.** נחזור לדוגמה 11, שבה השדה הוא  $\mathbb{R}$ ,  $V$  הוא מרחב הפולינומים ממעלה  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{v} = (1, x, \dots, x^n)$  הוא הבסיס הסטנדרטי של  $V$  ו- $D : V \rightarrow V$  הוא אופרטור הגזירה. המטריצה המייצגת היא כזו:

$$A = [D]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

רואים מיד שבסיס של  $\text{Ker}(A)$  הוא  $\{\vec{e}_1\}$ , ובסיס של  $\text{Im}(A)$  הוא  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ . נתרגם לוקטורים המתאימים ב- $V$  ונקבל כי הקבוצה  $\{x^0\}$  היא בסיס של  $\text{Ker}(D)$  ו- $\{x^0, \dots, x^{n-1}\}$  היא בסיס של  $\text{Im}(D)$ .

**דוגמה 13.** יהי  $F := \mathbb{R}$ ,

$$V := \{ \text{פולינומים מעל } \mathbb{R} \text{ במשתנה } x \text{ ממעלה } \geq 3 \}$$

ו- $W := \mathbb{R}^2$ . נגדיר פונקציה  $T : V \rightarrow W$  ע"י הנוסחה

$$T(p(x)) := \begin{bmatrix} p(0) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

האם  $T$  טרנספורמציה ליניארית? יהיו  $p(x), q(x) \in V$  ו- $c \in \mathbb{R}$ . אז

$$T(p(x) + q(x)) = \begin{bmatrix} p(0) + q(0) \\ p(2) + q(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q(0) \\ q(2) \end{bmatrix} = T(p(x)) + T(q(x))$$

ו-

$$T(cp(x)) = \begin{bmatrix} cp(0) \\ cp(2) \end{bmatrix} = cT(p(x))$$

המסקנה היא שאמנם  $T$  טרנספורמציה ליניארית.

עתה נחשב את  $\text{Ker}(T)$  ו- $\text{Im}(T)$ . לשם כך נבחר בבסיסים סדורים, ואנו נבחר בבסיסים הסטנדרטיים  $\mathbf{v} := (x^0, \dots, x^3)$  ב- $V$  ו- $\mathbf{w} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  ב- $W$ . המטריצה המייצגת היא

$$A := [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} [T(x^0)]_{\mathbf{w}} & [T(x^1)]_{\mathbf{w}} & [T(x^2)]_{\mathbf{w}} & [T(x^3)]_{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה  $AX = 0$  הוא

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ובסיס למרחב העמודות של  $A$  הוא  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ . לכן בסיס של  $\text{Ker}(T)$  הוא הקבוצה  $\{p_1(x), p_2(x)\}$ , כאשר  $p_1(x) := -2x + x^2$  ו- $p_2(x) := -4x + x^3$ . בסיס של  $\text{Im}(T)$  הוא  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ . בעצם אנו רואים כי  $\text{Im}(T) = W$ . לבסוף נעשה בדיקה:  $T(p_1(x)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  ו- $T(p_2(x)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , לכן פולינומים אלו הם אכן בגרעין של  $T$ , ומאחר שמעלותיהם שונות הם בלתי תלויים ליניארית.

**משפט 5.** יהיו  $V, W$  ו- $U$  מרחבים וקטוריים סוף מימדיים מעל השדה  $F$ , תהינה  $T : V \rightarrow W$  ו- $S : W \rightarrow U$  טרנספורמציות ליניאריות, ויהיו  $v, w$  ו- $u$  בסיסים סדורים של  $V, W$  ו- $U$  בהתאמה. אז

$$[S \circ T]_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} = [S]_{\mathbf{u}}^{\mathbf{w}} \cdot [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$$

**הוכחה.** נרשום  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . אז תוך שימוש כפול במשפט 4 מקבלים

$$[(S \circ T)(v_j)]_{\mathbf{u}} = [S(T(v_j))]_{\mathbf{u}} = [S]_{\mathbf{u}}^{\mathbf{w}} \cdot [T(v_j)]_{\mathbf{w}} = [S]_{\mathbf{u}}^{\mathbf{w}} \cdot [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} \cdot [v_j]_{\mathbf{v}}$$

נגדיר מטריצה  $A := [S]_{\mathbf{u}}^{\mathbf{w}} \cdot [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$ . מאחר ש- $\vec{e}_j$  הרי

$$[(S \circ T)(v_i)]_{\mathbf{u}} = A \cdot [v_i]_{\mathbf{v}} = A \vec{e}_i$$

לבסוף

$$[(S \circ T)]_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} = \left[ [(S \circ T)(v_1)]_{\mathbf{u}}, \dots, [(S \circ T)(v_n)]_{\mathbf{u}} \right] = [A \vec{e}_1, \dots, A \vec{e}_n] = A$$

מש"ל.

**טענה 7.** תהינה  $S, T : V \rightarrow W$  טרנספורמציות ליניאריות, יהי  $c$  סקלר ויהיו  $v$  ו- $w$  בסיסים סדורים של  $V$  ו- $W$  בהתאמה. אז

$$[S + T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} = [S]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} + [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$$

ו-

$$[cT]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} = c[T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$$

**הוכחה.** נרשום  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . לכל אינדקס  $j$  עמודה מס'  $j$  במטריצה  $[S + T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$  היא

$$[(S + T)(v_j)]_{\mathbf{w}} = [S(v_j) + T(v_j)]_{\mathbf{w}}$$

כעת לפי משפט 2

$$[S(v_j) + T(v_j)]_{\mathbf{w}} = [S(v_j)]_{\mathbf{w}} + [T(v_j)]_{\mathbf{w}}$$

$$[S]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} + [T]_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}$$

מש"ל.

בהנתן מטריצה  $A \in M_{n \times n}(F)$  ופולינום  $f(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i$  עם מקדמים ב- $F$  נגדיר

$$f(A) := \sum_{i=0}^m c_i A^i \in M_{n \times n}(F)$$

**מסקנה 5.** יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי, יהי  $f(x)$  פולינום עם מקדמים ב- $F$ , יהי  $v$  בסיס סדור של  $V$  ותהי  $A := [T]_v^v$  מטריצת הייצוג. אז

$$[f(T)]_v^v = f(A)$$

**הוכחה.** בעזרת משפט 5, טענה 7 ואינדוקציה. מש"ל.

### שינוי בסיס ומטריצות מעבר

**הגדרה 6.** נתון מרחב וקטורי  $V$  מממד  $n$  מעל השדה  $F$  עם שני בסיסים סדורים  $v$  ו- $v'$ . יהי  $I : V \rightarrow V$  אופרטור הזהות. המטריצה  $[I]_{v'}^v \in M_{n \times n}(F)$  נקראת **מטריצת המעבר מהבסיס  $v$  לבסיס  $v'$** .

**טענה 8.** יהיו  $v$  ו- $v'$  שני בסיסים סדורים של המרחב הוקטורי  $V$ . אז

$$[I]_{v'}^v \cdot [I]_v^{v'} = I_{n \times n}$$

$$P^{-1} = [I]_{v'}^v \text{ אז } P \text{ היא הפיכה ו-} [I]_v^{v'} = P^{-1}$$

**הוכחה.** נסמן  $v = (v_1, \dots, v_n)$  אז

$$[I]_v^v = [v_1]_v, \dots, [v_n]_v = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n] = I_{n \times n}$$

אולם על פי משפט 5 מתקיים

$$[I]_{v'}^v \cdot [I]_v^{v'} = [I]_v^v$$

מש"ל.

**דוגמה 14.** ניקח את המרחב הוקטורי  $V := \mathbb{R}^2$  מעל השדה  $F := \mathbb{R}$ , עם הבסיסים הסדורים  $e := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  ו- $v := (v_1, v_2)$ , כאשר  $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  ו- $v_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ . מטריצת המעבר מ- $v$  ל- $e$  היא

$$P := [I]_e^v = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

לכיוון השני מחשבים ש- $\vec{e}_1 = -2v_1 + v_2$  ו- $\vec{e}_2 = \frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$ . לכן

$$P^{-1} = [I]_v^e = [[\vec{e}_1]_v, [\vec{e}_2]_v] = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

**הגדרה 7.** תהיינה  $A, B \in M_{n \times n}(F)$  ו- $A$  ו- $B$  נקראות **מטריצות דומות** אם ישנה מטריצה הפיכה  $P \in M_{n \times n}(F)$  כך ש- $B = PAP^{-1}$ .

**טענה 9.** יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי, יהיו  $v$  ו- $v'$  שני בסיסים סדורים של  $V$ , ותהי  $P := [I]_{v'}^v$  מטריצת המעבר. אז

$$[T]_{v'}^{v'} = P \cdot [T]_v^v \cdot P^{-1}$$

**הוכחה.** ע"פ משפט 5 (שימוש כפול)

$$[T]_{v'}^{v'} = [I \circ T \circ I]_{v'}^{v'} = [I]_{v'}^v \cdot [T \circ I]_{v'}^{v'} = [I]_{v'}^v \cdot [T]_v^v \cdot [I]_{v'}^{v'} = P \cdot [T]_v^v \cdot P^{-1}$$

מש"ל.

**דוגמה 15.** השדה הוא  $F := \mathbb{R}$  והמרחב הוא המישור  $V := \mathbb{R}^2$ . האופרטור  $T : V \rightarrow V$  הוא "הטלה על ציר  $x$ ", כלומר  $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ . פעולת  $T$  על הבסיס הסטנדרטי  $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  היא  $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$  ו- $T(\vec{e}_2) = 0$ ; לכן מטריצת הייצוג הינה

$$[T]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נמצא את מטריצת הייצוג ביחס לבסיס סדור אחר. נגדיר  $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  ו- $v := (v_1, v_2)$ . הפעולה של  $T$  על אברי בסיס זה היא

$$T(v_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2v_1 + v_2$$

$$T(v_2) = T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -6v_1 + 3v_2$$

לכן

$$[T]_v^v = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

מטריצות המעבר הן

$$P^{-1} = [I]_e^v = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ו-

$$P = [I]_e^v = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ואמנם

$$P \cdot [T]_v^v \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [T]_e^e$$



## ז. ערכים עצמיים וליכסון אופרטורים

יהי  $V$  מרחב וקטורי ממימד  $n$  מעל השדה  $F$  ויהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי. אנו נראה כי לאופרטור  $T$  מתאימים סקלרים  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , כאשר  $m \leq n$ , המתארים במידה רבה את התכונות של  $T$ . סקלרים אלו יקראו הערכים העצמיים של  $T$ .

**הגדרה 1.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף מימדי מעל השדה  $F$ , יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי, ויהיו  $v \in V$  ו- $\lambda \in F$ . נניח ש- $v \neq \vec{0}$  ומתקיים

$$T(v) = \lambda v$$

אז  $\lambda$  נקרא **ערך עצמי** של  $T$ , ו- $v$  נקרא **וקטור עצמי** של  $T$ , השייך לערך העצמי  $\lambda$ .

**הערה.** נשים לב כי וקטור עצמי  $v$  תמיד שונה מ- $\vec{0}$ !

**דוגמה 1.** ניקח את המרחב  $V := F^n$ . בהנתן מטריצה  $A := \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$  נגדיר אופרטור

$T : V \rightarrow V$  ע"י  $T(v) := Av$ . אז לכל  $i$  מתקיים

$$T(\vec{e}_i) = A\vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i$$

לכן  $\lambda_i$  ערך עצמי ו- $\vec{e}_i$  וקטור עצמי השייך ל- $\lambda_i$ .

**דוגמה 2.** כאן השדה הוא  $F := \mathbb{R}$  והמרחב הוא המישור  $V := \mathbb{R}^2$ . האופרטור  $T$  הוא סיבוב בזווית  $\frac{\pi}{2}$ . נחפש ערכים עצמיים של  $T$ . תחילה נחקור את השאלה באופן גיאומטרי. אם  $T(v) = \lambda v$  עבור  $\lambda \in \mathbb{R}$  הרי  $T(v)$  ו- $v$  הם על אותו ישר, וזה אפשרי רק אם  $v = \vec{0}$ . לכן אין ל- $T$  וקטורים עצמיים ולא ערכים עצמיים.

נראה זאת עכשיו באופן אלגברי. כזכור המטריצה של  $T$  בבסיס הסטנדרטי היא  $A := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

יהי  $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \vec{0}$  אז

$$T(v) = Av = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$$

אם  $T(v) = \lambda v = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$  אז  $-b = \lambda a$  ו- $a = \lambda b$ . לכן  $a = \lambda b = -\lambda^2 a$  ו- $a = -1$ . אבל אין מספר ממשי  $\lambda$  המקיים  $\lambda^2 = -1$ . משום כך אין ל- $T$  ערכים עצמיים.

**דוגמה 3.** שוב השדה הוא  $F := \mathbb{R}$ . המרחב הוא

$$V := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq n\}$$

האופרטור  $D$  הוא אופרטור הגזירה  $D(p) := \frac{dp}{dx}$ . ניקח  $v := x^0 \in V$ . אז  $D(v) = \vec{0} = 0 \cdot v$ . לכן  $v$  וקטור עצמי של  $D$  השייך לערך העצמי  $\lambda = 0$ .

כיצד נמצא את הערכים העצמיים של  $T$ ? ניקח בסיס סדור  $v = (v_1, \dots, v_n)$  של  $V$ , ותהי  $w := [v]_v \in F^n$  נרשום  $v \in V$  וקטור  $T$ . בהנתן וקטור  $v \in V$  נרשום  $w := [v]_v \in F^n$

ידוע כי

$$[T(v)]_{\mathbf{v}} = [T]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} \cdot [v]_{\mathbf{v}} = A \cdot w$$

וכן

$$[\lambda v]_{\mathbf{v}} = \lambda [v]_{\mathbf{v}} = \lambda w$$

אנו רואים ש- $T(v) = \lambda v$  אם  $Aw = \lambda w$ . כעת  $Aw = \lambda w$  אם  $Aw = 0$  אם  $(\lambda I - A)w = 0$ , כאשר  $I \in M_{n \times n}(F)$  היא מטריצת היחידה. התנאי שיש וקטור  $w \in F^n$  כך ש- $(\lambda I - A)w = \vec{0}$  הוא ש- $\det(\lambda I - A) = 0$ . הוכחנו את המשפט הבא:

**משפט 1.** יהי  $T$  אופרטור ליניארי על מרחב סוף מימדי  $V$ , יהי  $\mathbf{v}$  בסיס סדור של  $V$  ותהי  $A := [T]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}$ .  
 א. סקלר  $\lambda \in F$  הוא ערך עצמי של  $T$  אם  $\det(\lambda I - A) = 0$ .  
 ב. נניח ש- $\lambda$  הוא ערך עצמי של  $T$ . הוקטורים העצמיים של  $T$  השייכים ל- $\lambda$  הם הוקטורים  $v \in V$  כך ש- $v \neq \vec{0}$  ו- $[v]_{\mathbf{v}}$  פתרון של המשוואה ההומוגנית  $(\lambda I - A)X = O$ .

## חשבון פולינומים

יהי  $F$  שדה. עד כה קבוצת הפולינומים  $F[x]$  היתה רק מרחב וקטורי. אולם ניתן גם לכפול פולינומים. בהנתן פולינומים  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$  ו- $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$  מכפלתם היא הפולינום

$$(fg)(x) := \left( \sum_{i=0}^m a_i x^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^n b_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right) \cdot x^k$$

כפל פולינומים הוא קומוטטיבי, ודיסטריבוטיבי ביחס לחיבור. הכפל גם מכבד הצבה: לכל סקלר  $\lambda$  מתקיים

$$(fg)(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$$

אם  $f, g \neq 0$  גם מתקיים

$$\deg(f) + \deg(g) = \deg(fg)$$

**משפט 2. (אלגוריתם החילוק)** יהי  $f(x)$  פולינום כלשהו ויהי  $g(x)$  פולינום ממעלה  $1 \leq d$ . אזי ישנם פולינומים יחידים  $q(x)$  ו- $r(x)$  כך ש-

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

ו-

$$\deg(r) \leq d - 1$$

רעיון ההוכחה: באינדוקציה על מעלת הפולינום  $f(x)$ . הפולינום  $q(x)$  נקרא **המנה** ו- $r(x)$  נקרא **השארית**.

הרי דוגמה לחילוק פולינומים. האלגוריתם עובד בצורה דומה לחילוק מספרים שלמים גדולים כפי שלומדים בבית הספר היסודי. במקום החזקות של 10 בכתובה העשרונית של מספר, כאן יש חזקות של המשתנה  $x$ .

**דוגמה 4.** נתון הפולינום  $f(x) := x^3 - 1$  מעל  $\mathbb{R}$ . נחלק את  $f(x)$  ב- $x - 1$  :  $g(x) := x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 1 \\ x^3 - x^2 \quad -1 \quad | \quad x - 1 \\ \hline x^2 - x \quad -1 \\ \hline x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

התוצאה: השארית היא  $r(x) := 0$ . לכן  $f(x) = (x - 1)q(x)$ , כאשר  $q(x) := x^2 + x + 1$ .

**מסקנה 1.** יהי  $f(x)$  פולינום כלשהו ויהי  $\lambda$  סקלר. אז  $x - \lambda$  מחלק את  $f(x)$  אם  $f(\lambda) = 0$ .

**הוכחה.** תחילה נניח ש- $x - \lambda$  מחלק את  $f(x)$ . זאת אומרת שקיים פולינום  $q(x)$  כך ש-

$$f(x) = q(x)(x - \lambda)$$

נציב  $\lambda$  ונקבל

$$f(\lambda) = q(\lambda) \cdot 0 = 0$$

לכוון השני נניח ש- $f(\lambda) = 0$ . ע"פ אלגוריתם החילוק יש  $q(x)$  ו- $r(x)$  כך ש-

$$f(x) = q(x)(x - \lambda) + r(x)$$

ו- $\deg(r) \leq 0$ . לכן  $r(x) = \mu \in F$ . נציב  $\lambda$  ונקבל

$$0 = f(\lambda) = q(\lambda) \cdot 0 + \mu = \mu$$

לכן

$$f(x) = q(x)(x - \lambda)$$

מש"ל.

**מסקנה 2.** בהנתן פולינום  $f(x)$  ממעלה  $0 \leq n$  קיימים סקלרים  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$  כך ש-

$$f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_m) \cdot q(x)$$

ו- $q(\lambda) \neq 0$  לכל  $\lambda \in F$ .

**הוכחה.** באינדוקציה על  $n$ . אם  $n = 0$  הרי ע"פ הגדרה  $f(x)$  הוא סקלר שונה מ- $0$ , וניקח  $m := 0$  ו- $q(x) := f(x)$ .

כעת נניח ש- $n \geq 1$ . אם ל- $f(x)$  אין שורשים ניקח  $m := 0$  ו- $q(x) := f(x)$ . אחרת יהי  $\lambda_1$  שורש של  $f(x)$ . ע"פ מסקנה 1 מתקיים  $f(x) = (x - \lambda_1)g(x)$  עבור פולינום  $g(x)$  ממעלה  $n - 1$ . מהנחת האינדוקציה מקבלים ש-

$$g(x) = (x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_m) \cdot q(x)$$

מש"ל.

ו- $q(\lambda) \neq 0$  לכל  $\lambda \in F$ .

הסקלרים  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  במסקנה האחרונה נקראים **השורשים** של  $f(x)$  (בשדה  $F$ ).

**דוגמה 5.** בדוגמה 4 קיבלנו

$$x^3 - 1 = f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1)q(x)$$

האם ל- $q(x)$  יש שורשים ב- $\mathbb{R}$ ? (רמז: מצא את כל השורשים המרוכבים של  $f(x)$ ).

**מסקנה 3.** בהנתן פולינום  $f(x)$  ממעלה  $0 \leq n$  קיימים לכל היותר  $n$  שורשים ל- $f(x)$ .

מש"ל.

**הוכחה.** זה משום ש- $m \leq n$  במסקנה 2.

**דוגמה 6.** ניקח  $F := \mathbb{C}$  ו- $f(x) := x^2 + bx + c$  עבור  $b, c \in \mathbb{C}$ .

$$f(x) = (x - \lambda_+)(x - \lambda_-)$$

כאשר

$$\lambda_{\pm} := \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

הבטוי  $b^2 - 4c$  נקרא **הדיסקרימיננטה** של  $f(x)$ , והוא מתאפס בדיוק כאשר  $\lambda_+ = \lambda_-$ .

לפי המשפט היסודי של האלגברה (משפט 1 בפרק א') כל פולינום  $f(x)$  מעל  $\mathbb{C}$  מתפרק לגורמים ליניאריים. אולם המשפט אינו אומר מהם השורשים של  $f(x)$ ; רק שקיימים שורשים. אם  $n = 2$  יש לנו נוסחה מוכרת (ראה למעלה). יש נוסחאות (מסובכות יותר) למעלות  $n = 3, 4$ . עבור  $n \geq 5$  אין נוסחה (זהו משפט גאלואה).

אפשר למצוא **קירובים** של השורשים בשיטות נומריות שונות (בעזרת מחשב). למשל **שיטת ניוטון** למציאת שורשים ממשיים של פולינום עם מקדמים ממשיים. שיטה זו נלמדת בחדו"א ומשתמשת במשיקים לגרף של  $f(x)$ .

**דוגמה 7.** הנה עוד שימוש בחשבון פולינומים. יהי  $V$  מרחב הפולינומים ממעלה  $n \geq 0$  מעל  $\mathbb{R}$ . נבחר  $n + 1$  נקודות שונות  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . ידוע לנו כי יש טרנספורמציה ליניארית  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  שהנוסחה שלה

$$T(f) := \begin{bmatrix} f(a_0) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{bmatrix}$$

אנו נראה ש- $T$  היא איזומורפיזם ליניארי.

יהי  $f(x) \in \text{Ker}(T)$ . נניח על דרך השלילה ש- $f(x) \neq \vec{0}$ . אז  $n \geq \deg(f) \geq 0$ , ועל פי מסקנה 3 ידוע שיש ל- $f$  לכל היותר  $n$  שורשים. מצד שני  $f(a_0) = \dots = f(a_n) = 0$ ; וזו סתירה. אם כן רואים ש- $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$ . מאחר ש- $\dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n + 1 = \dim(V)$  נובע כי  $T$  איזומורפיזם.

המסקנה המעניינת היא שבהנתן מספרים  $b_0, \dots, b_r \in \mathbb{R}$  קיים פולינום יחיד  $f(x)$  ממעלה  $n \geq 0$  כך ש- $f(a_i) = b_i$  לכל  $i$ .

תרגיל: תהי  $B = [b_{ij}]$  המטריצה מגודל  $(n + 1) \times (n + 1)$  שרכיביה  $b_{ij} := a_{i-1}^{j-1}$ . השתמש במה שהוכחנו זה עתה להראות כי  $\det(B) \neq 0$ . נקראת **מטריצת ונדרמונדה**.

## הפולינום האופייני

**הגדרה 2.** תהי נתונה מטריצה  $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(F)$ . נתבונן במטריצה

$$xI - A = \begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{bmatrix}$$

כאשר  $x$  משתנה. זוהי מטריצה ריבועית, וניתן להשתמש בהגדרת הדטרמיננטה (הגדרה 2 בפרק ה') לקבל את הפולינום

$$p_A(x) := \det(xI - A)$$

זהו פולינום עם מקדמים ב- $F$  הנקרא **הפולינום האופייני של  $A$** .

**טענה 1.** תהי  $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(F)$

א. הפולינום האופייני הוא ממעלה  $n$ , וצורתו

$$p_A(x) = x^n - \operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

כאשר  $\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

ב. בהנתן  $\lambda \in F$  מתקיים  $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ ; כלומר אם תחילה מציבים  $\lambda := x$  במטריצה

$xI - A$  ואח"כ מחשבים את הדטרמיננטה, התוצאה זהה להצבת  $x := \lambda$  בפולינום  $p_A(x)$ .

לא נוכיח טענה זו.

**טענה 2.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף מימדי, יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי ויהיו  $v, w$  שני בסיסים

סדורים של  $V$ . נגדיר  $A := [T]_v^v$  ו- $B := [T]_w^w$ . אז  $p_A(x) = p_B(x)$ .

**הוכחה.** תהי  $P := [I]_w^v$  מטריצת המעבר. אז  $B = PAP^{-1}$ . מאחר שכללי חשבון מטריצות תופסים

גם למטריצות עם איברים שהם פולינומים (ראה למשל בספר Hoffman and Kunze), ומאחר ש-

$$\det(P) \cdot \det(P^{-1}) = 1$$

$$\begin{aligned} p_B(x) &= \det(xI - B) = \det(xI - PAP^{-1}) = \det(P(xI)P^{-1} - PAP^{-1}) \\ &= \det(P(xI - A)P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(xI - A) \cdot \det(P^{-1}) \\ &= \det(xI - A) = p_A(x) \end{aligned}$$

מש"ל.

**הגדרה 3.** יהי  $T$  אופרטור ליניארי על מרחב סוף מימדי  $V$ . **הפולינום האופייני של  $T$**  מוגדר להיות

$$p_T(x) := p_A(x)$$

כאשר  $v$  הוא בסיס סדור כלשהו של  $V$  ו- $A := [T]_v^v$ .

טענה 2 מראה שההגדרה הזו טובה, ז"א  $p_T(x)$  איננו תלוי בבחירת הבסיס הסדור  $v$ .

**משפט 3.** יהי  $T$  אופרטור ליניארי על מרחב סוף מימדי  $V$  מעל שדה  $F$ .

א. הערכים העצמיים של  $T$  הם השורשים ב- $F$  של הפולינום האופייני  $p_T(x)$ .

ב. יהי  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$ . הוקטורים העצמיים של  $T$  השייכים ל- $\lambda$  הם הוקטורים השונים מאפס בתת-המרחב  $\text{Ker}(\lambda I - T)$ , כאשר  $I : V \rightarrow V$  הוא אופרטור הזהות.

הוכחה. זה שילוב של משפט 1 וטענה 2(ב). מש"ל.

**דוגמה 8.** ניקח את המרחב  $V := F^n$ , המטריצה  $A := \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$  והאופרטור  $T(v) := Av$ .

מהו הפולינום האופייני?

$$p_T(x) = p_A(x) = \det(xI - A) = \det \begin{pmatrix} x - \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x - \lambda_n \end{pmatrix} = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

ואים שהערכים העצמיים הם  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

**דוגמה 9.** השדה הוא  $\mathbb{R}$  והמרחב הוא  $V := \mathbb{R}^2$ . ניקח את המטריצה  $A := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  ואת האופרטור

$T(v) := Av$  אז

$$p_T(x) = \det(xI - A) = \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

לפולינום  $p_T(x)$  אין שורשים ב- $\mathbb{R}$ , ולכן אין ערכים עצמיים לאופרטור  $T$ . ראינו זאת כבר בדוגמה 2.

**דוגמה 10.** השדה הוא  $\mathbb{R}$ , המרחב הוא

$$V := \{ f(t) \text{ מעל } \mathbb{R} \text{ ממעלה } n \geq 0 \}$$

והאופרטור הוא  $D(f) := \frac{df}{dt}$ . ניקח את הבסיס הסטנדרטי  $v = (t^0, \dots, t^n)$ . המטריצה המייצגת היא

$$[D]_v^v = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

והפולינום האופייני הוא

$$p_D(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix} = x^{n+1}$$

ואים שהערך העצמי היחיד הוא  $\lambda = 0$ .

### מציאת וקטורים עצמיים

יהי  $T$  אופרטור ליניארי על מרחב  $V$ , ונניח כי מצאנו ערך עצמי  $\lambda$  של  $T$  (כלומר שורש של  $p_T(x)$ ). כיצד נמצא וקטור עצמי השייך ל- $\lambda$ ? יהי  $\vec{0} \neq v$ . אז וקטור עצמי השייך ל- $\lambda$  אם  $T(v) = \lambda v$ , כלומר אם  $v \in \text{Ker}(\lambda I - T)$ .

**הגדרה 4.** יהי  $T$  אופרטור ליניארי על מרחב וקטורי  $V$  ויהי  $\lambda \in F$  ערך עצמי של  $T$ . **המרחב העצמי** השייך ל- $\lambda$  הוא תת המרחב

$$V_\lambda := \text{Ker}(\lambda I - T) \subset V$$

כאשר  $I$  הוא אופרטור הזהות.

כלומר הוקטורים העצמיים של  $T$  השייכים ל- $\lambda$  הם בדיוק הוקטורים השונים מ- $\vec{0}$  ב- $V_\lambda$ . אנו נתעניין בבסיס של  $V_\lambda$ .

**דוגמה 11.** נתבונן במקרה הבא:  $F := \mathbb{R}$ ,  $V := \mathbb{R}^3$ ,  $A := \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ , ו- $T(v) := Av$ . נחשב את הפולינום האופייני  $p_T(x)$ .

$$p_T(x) = \det(xI - A) = \det \begin{bmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{bmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

ננסה לנחש שורש של  $p_A(x)$ , ונתחיל במספרים שלמים  $\dots, \pm 2, \pm 1, 0, \lambda$ . עם  $\lambda = 1$  יש הצלחה:

$$p(1) = 1 - 5 + 8 - 4 = 0$$

כעת נחלק את  $p_T(x)$  ב- $x - 1$ .

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 4 \\ x^3 - 5x^2 + 8x - 1 \quad \underline{x - 1} \\ \hline x^3 - x^2 \\ \hline -4x^2 + 8x - 4 \\ -4x^2 + 4x \\ \hline 4x - 4 \\ 4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

מקבלים ש-

$$p_T(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2$$

ולכן הערכים העצמיים של  $T$  הם  $\lambda_1 = 1$  ו- $\lambda_2 = 2$ . נמשיך במציאת בסיס ל- $V_{\lambda_1}$ . דירוג המטריצה

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

מראה ש-

$$V_{\lambda_1} = \text{Ker}(\lambda_1 I - A) = \text{Sp}(v_1)$$

כאשר  $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ . בדומה מחשבים עבור  $V_{\lambda_2}$  ומוצאים ש-

$$V_{\lambda_2} = \text{Ker}(\lambda_2 I - A) = \text{Sp}(v_2, v_3)$$

כאשר  $v_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ו-  $v_3 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

לסיום נעשה בדיקה (חלקית). נחשב את  $T(v_2)$ :

$$T(v_2) = Av_2 = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot v_2 = \lambda_2 v_2$$

### ריבוי גיאומטרי וריבוי אלגברי של ערך עצמי

**הגדרה 5.** יהי  $T$  אופרטור ליניארי על מרחב וקטורי סוף מימדי  $V$  מעל השדה  $F$ , ויהי  $\lambda \in F$  ערך עצמי של  $T$ .

א. נפרק את הפולינום האופייני למכפלה

$$p_T(x) = (x - \lambda)^{e_\lambda} q(x)$$

כאשר  $q(\lambda) \neq 0$ . אז  $e_\lambda$  נקרא **הריבוי האלגברי** של הערך העצמי  $\lambda$ .

ב. **הריבוי הגיאומטרי** של  $\lambda$  הוא  $\dim(V_\lambda)$ , כאשר  $V_\lambda \subset V$  הוא המרחב העצמי השייך ל- $\lambda$ .

**משפט 4.** בתנאי הגדרה 5 מתקיים אי השוויון  $\dim(V_\lambda) \leq e_\lambda$ .

לא נוכיח משפט זה.

**דוגמה 12.** ניקח  $F := \mathbb{Q}$ ,  $V := \mathbb{Q}^2$  ו-  $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . הפולינום האופייני הוא  $p_A(x) = (x - 1)^2$ . לכן

הערך העצמי היחיד של  $A$  הוא  $\lambda = 1$ , והריבוי האלגברי הוא  $e_\lambda = 2$ . מאחר ש-  $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  מקבלים שהריבוי הגיאומטרי הוא  $\dim(V_\lambda) = 1$ .

**טענה 3.** נניח כי  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  הם ערכים עצמיים שונים של  $T$ , ולכל  $i$  נתון וקטור עצמי  $v_i$  של  $\lambda_i$ . אז הסדרה  $(v_1, \dots, v_m)$  בלתי תלויה ליניארית.

**הוכחה.** נניח בדרך השלילה שהסדרה  $(v_1, \dots, v_m)$  תלויה ליניארית. אז יש וקטור  $v_i$  שהוא צירוף ליניארי של קודמיו בסדרה. יהי האינדקס המינימלי כך ש-  $v_{i_0}$  צירוף ליניארי של קודמיו. ז"א  $v_{i_0} = \sum_{j=1}^{i_0-1} a_j v_j$  ויש סקלרים  $a_1, \dots, a_{i_0-1}$  כך ש-



מאחר ש- $\vec{0} \neq v_{i_0}$  הרי  $i_0 \geq 2$  ויש  $j_0$  בטווח  $1, \dots, i_0 - 1$  כך ש- $a_{j_0} \neq 0$ . כעת

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \lambda_{i_0} v_{i_0} - T(v_{i_0}) = (\lambda_{i_0} I - T)(v_{i_0}) \\ &= (\lambda_{i_0} I - T) \left( \sum_{j=1}^{i_0-1} a_j v_j \right) = \sum_{j=1}^{i_0-1} a_j (\lambda_{i_0} I - T)(v_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{i_0-1} a_j (\lambda_{i_0} v_j - T(v_j)) = \sum_{j=1}^{i_0-1} a_j (\lambda_{i_0} v_j - \lambda_j v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{i_0-1} a_j (\lambda_{i_0} - \lambda_j) v_j \end{aligned}$$

מאחר ש- $\lambda_{i_0} \neq \lambda_{j_0}$  הרי  $a_{j_0} (\lambda_{i_0} - \lambda_{j_0}) \neq 0$ . מצאנו ש- $\vec{0}$  הוא צירוף ליניארי לא טריוויאלי של אברי הסדרה  $(v_1, \dots, v_{i_0-1})$ . זאת סתירה משום שהסדרה הזו בת"ל. מש"ל.

**משפט 5.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף מימדי מעל השדה  $F$ , יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי ויהיו  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ערכים עצמיים שונים של  $T$ . נניח כי לכל  $i$  מ-1 עד  $m$  נתונה סדרה בלתי תלויה ליניארית  $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots)$  של וקטורים בתת המרחב העצמי  $V_{\lambda_i}$ . אז הסדרה המשורשרת

$$v := (v_1, v_2, \dots, v_m) = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{21}, v_{22}, \dots)$$

היא סדרה בלתי תלויה ליניארית ב- $V$ .

**הוכחה.** נניח על דרך השלילה כי הסדרה  $v$  תלויה ליניארית. ז"א ישנם סקלרים  $a_{ij}$ , לא כולם 0, כך ש-

$$\vec{0} = a_{11}v_{11} + a_{12}v_{12} + \dots + a_{21}v_{21} + a_{22}v_{22} + \dots$$

נגדיר וקטורים חדשים

$$w_i := a_{i1}v_{i1} + a_{i2}v_{i2} + \dots \in V_{\lambda_i}$$

לכן הסכום הוא

$$\vec{0} = w_1 + w_2 + \dots + w_m$$

יהי  $(i, j)$  זוג אינדקסים כך ש- $a_{ij} \neq 0$ . מאחר ש- $v_i$  סדרה בת"ל נובע ש- $w_i \neq \vec{0}$ . כלומר לא כל הוקטורים  $w_1, \dots, w_m$  הם אפס. ע"י מיספור מחדש אפשר להניח כי  $w_1, \dots, w_k$  שונים מאפס,  $w_{k+1} = \dots = w_m = \vec{0}$  ו- $k \geq 1$ . כעת  $w_1 + \dots + w_k = \vec{0}$  ו- $w_1, \dots, w_k$  הם וקטורים עצמיים השייכים לערכים העצמיים השונים  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  בהתאמה. זו סתירה לטענה 3, אשר לפיה הסדרה  $(w_1, \dots, w_k)$  בת"ל. מש"ל.

**מסקנה 4.** יהיו  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ערכים עצמיים שונים של אופרטור ליניארי  $T : V \rightarrow V$ , ויהי  $n := \dim(V)$  אז

$$\sum_{i=1}^m \dim(V_{\lambda_i}) \leq n$$

**הוכחה.** בהנתן סדרה סופית  $w$  נסמן ב- $\#w$  את האורך שלה. לכל  $i$  ניקח בסיס סדור  $v_i$  לתת המרחב  $V_{\lambda_i}$ . אז  $\dim(V_{\lambda_i}) = \#v_i$  על פי המשפט הסדרה המשורשרת  $v := (v_1, v_2, \dots, v_m)$  היא בת"ל.

מקבלים

$$\sum_{i=1}^m \dim(V_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^m \#\mathbf{v}_i = \#\mathbf{v} \leq \dim(V) = n$$

מש"ל.

**מסקנה 5.** אם ערכים עצמיים שונים של  $T$  ו- $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ערכים עצמיים שונים של  $T$  ו-

$$\sum_{i=1}^m \dim(V_{\lambda_i}) = \dim(V)$$

אז ל- $V$  יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של  $T$ .

**הוכחה.** ניקח בסיסים סדורים כמו בהוכחת המסקנה הקודמת. אז  $\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$  סדרה בת"ל באורך  $\dim(V)$ , כלומר זה בסיס סדור של  $V$ . מש"ל.

**מסקנה 6.** יהי  $T$  אופרטור ליניארי על מרחב  $n$ -מימדי  $V$  עם  $n$  ערכים עצמיים שונים  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . אז ל- $V$  יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של  $T$ .

**הוכחה.** מאחר ש- $\dim(V_{\lambda_i}) \geq 1$  לכל  $i$  הרי

$$\sum_{i=1}^m \dim(V_{\lambda_i}) \geq n$$

מש"ל.

ע"פ מסקנה 4 יש שוויון. כעת נשתמש במסקנה 5.

### ליכסון מטריצות ואופרטורים

מטריצה  $D = [d_{ij}] \in M_{n \times n}(F)$  נקראת **אלכסונית** אם  $d_{ij} = 0$  לכל  $i \neq j$ . כלומר אם

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

כאשר  $d_{ii} = \lambda_i$ . מקובל לרשום את אברי האלכסון כך, כמובן משום שאלו הערכים העצמיים של  $D$ . נוח מאוד לעשות פעולות חשבוניות עם מטריצות אלכסוניות. נדגים זאת במקרה  $n = 2$ . החיבור הוא

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \mu_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \mu_2 \end{bmatrix}$$

הכפל הוא

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mu_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 \end{bmatrix}$$

כך גם לגבי פולינומים. בהנתן פולינום

$$f(x) = c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0$$

עם מקדמים בשדה  $F$ , אז

$$f\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=0}^m c_i \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m c_i \lambda_1^i & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^m c_i \lambda_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix}$$

**הגדרה 6.** מטריצה  $A \in M_{n \times n}(F)$  נקראת **מטריצה ניתנת לליכסון** (מעל  $F$ ) אם יש מטריצה הפיכה  $P \in M_{n \times n}(F)$  כך ש- $D := P^{-1}AP$  היא מטריצה אלכסונית.  $P$  נקראת **מטריצה מלכסנת** של  $A$ .

**הגדרה 7.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף מימדי מעל שדה  $F$  ויהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי.  $T$  נקרא **אופרטור ניתן לליכסון** אם יש בסיס סדור  $w$  של  $V$  המורכב מוקטורים עצמיים של  $T$ . הבסיס  $w$  נקרא **בסיס מלכסן** של  $V$  ביחס ל- $T$ .

**טענה 4.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף מימדי מעל שדה  $F$ , יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי ויהי  $w = (w_1, \dots, w_n)$  בסיס סדור של  $V$ . התנאים הבאים שקולים:

א.  $w$  הוא בסיס מלכסן של  $V$  ביחס ל- $T$ .

ב. המטריצה  $[T]_w^w$  היא אלכסונית.

כאשר זה קורה יהיו  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  הערכים העצמיים כך ש- $T(w_i) = \lambda_i w_i$ . אז

$$[T]_w^w = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

**הוכחה.** ע"פ הגדרה

$$[T]_w^w = [[T(w_1)]_w, \dots, [T(w_n)]_w]$$

משום כך

$$[T]_w^w = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

אם  $[T(w_i)]_w = \lambda_i \vec{e}_i$  לכל  $i$ , אם  $T(w_i) = \lambda_i w_i$  לכל  $i$ . כלומר  $[T]_w^w$  אלכסונית אם  $w$  הוא בסיס מלכסן. מש"ל.

**משפט 6.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף מימדי מעל השדה  $F$ , יהי  $T : V \rightarrow V$  אופרטור ליניארי ויהי  $v$  בסיס סדור של  $V$ . התנאים הבאים שקולים:

א.  $T$  הוא האופרטור ניתן לליכסון.

ב. המטריצה  $A := [T]_v^v$  ניתנת לליכסון.

אם התנאים הללו מתקיימים יהי  $w = (w_1, \dots, w_n)$  בסיס מלכסן, ויהיו  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  הערכים

$$\text{העצמיים המתאימים, כלומר } T(w_i) = \lambda_i w_i \text{ נגדיר } D := \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ ו- } P := [T]_v^w \text{ אז}$$

$$P^{-1}AP = D$$

**הוכחה.** א  $\Leftarrow$  ב: נניח כי  $T$  ניתן לליכסון, כלומר יש ל- $V$  בסיס מלכסון  $w$  שביחס אליו  $D := [T]_w^w$  אלכסונית. תוך שימוש במשפט 5 מפרק ו' מקבלים כי

$$, P^{-1}AP = [I]_w^v \cdot [T]_v^v \cdot [I]_v^w = [T]_w^w = D$$

כאשר  $P := [I]_v^w$ . לכן  $A$  ניתנת לליכסון. לפי טענה 4 רואים ש-  
 $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$  כאשר

$$.T(w_i) = \lambda_i w_i$$

ב  $\Leftarrow$  א: ידוע שיש מטריצה הפיכה  $P$  כך ש- $D := P^{-1}AP$  היא אלכסונית. יהי  $w_j \in V$  הווקטור כך ש- $[w_j]_v$  הוא עמודה מס'  $j$  במטריצה  $P$ , ונגדיר  $w := (w_1, \dots, w_n)$ . אז  $P = [I]_v^w$ , וע"פ החישוב הקודם  $D = [T]_w^w$ . על פי טענה 4,  $w$  הוא בסיס מלכסון של  $T$ . מש"ל.

**מסקנה 7.** תהי  $A \in M_{n \times n}(F)$ . נניח כי  $w := (w_1, \dots, w_n)$  בסיס סדור של  $F^n$ , ולכל  $i$  מתקיים ש- $w_i$  הוא וקטור עצמי של  $A$  השייך לערך עצמי  $\lambda_i$ . נגדיר

$$. P := [w_1, \dots, w_n] \in M_{n \times n}(F)$$

אז  $P$  הפיכה ו-

$$. P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

מש"ל.

**הוכחה.** במשפט ניקח  $V := F^n$ ,  $v := (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  ו- $T(v) := Av$ .

דרך טובה לזכור את הנוסחה שבמסקנה האחרונה היא הצורה השקולה

$$AP = PD$$

אשר ניתן לקבל באופן הבא:

$$\begin{aligned} AP &= A[w_1, \dots, w_n] = [Aw_1, \dots, Aw_n] \\ &= [\lambda_1 w_1, \dots, \lambda_n w_n] = [w_1, \dots, w_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \end{aligned}$$

**טענה 5.** תהי  $A$  מטריצה ריבועית מעל השדה  $F$  והי  $f(x)$  פולינום עם מקדמים ב- $F$ . נניח כי  $A$

ניתנת לליכסון, כלומר  $A = PDP^{-1}$  ו- $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$  אז

$$. f(A) = P \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1}$$

הוכחה. לכל  $i$  מתקיים

$$A^i = (PDP^{-1})^i = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})}_i = PD^iP^{-1}$$

לכל שתי מטריצות  $B$  ו- $C$  מגודל מתאים מתקיים

$$PBP^{-1} + PCP^{-1} = P(BP^{-1} + CP^{-1}) = P(B + C)P^{-1}$$

נניח כי  $f(x) = c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0$  אז:

$$\begin{aligned} f(A) &= c_m A^m + \cdots + c_1 A + c_0 I = \\ &= c_m P D^m P^{-1} + \cdots + c_1 P D P^{-1} + c_0 P I P^{-1} \\ &= P(c_m D^m) P^{-1} + \cdots + P(c_1 D) P^{-1} + P(c_0 I) P^{-1} \\ &= P(c_m D^m + \cdots + c_1 D + c_0 I) P^{-1} \\ &= P \cdot f(D) \cdot P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

מש"ל.

**דוגמה 13.** ניקח את השדה  $F := \mathbb{Q}$  והמטריצה  $A := \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{bmatrix}$ . רוצים לחשב את  $A^{100}$ . ננסה תחילה ללכסן את  $A$ . הפולינום האופייני הוא

$$p_A(x) = \det \begin{bmatrix} x+1 & -5 \\ 10 & x-14 \end{bmatrix} = x^2 - 13x + 36 = (x-9)(x-4)$$

יש אם כן שני ערכים עצמיים שונים  $\lambda_1 = 4$  ו- $\lambda_2 = 9$  והמטריצה  $A$  ניתנת לליכסון. עכשיו נמצא וקטורים עצמיים. ע"י דרוג

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

הואים כי  $V_{\lambda_1} = \text{Sp}(v_1)$  כאשר  $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . בדומה דרוג

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נותן ש- $V_{\lambda_2} = \text{Sp}(v_2)$  כאשר  $v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

אם כן  $A$  ניתנת לליכסון ע"י המטריצות

$$P := [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

חישוב מראה כי  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . נעזור בשלב זה לבצע בדיקה:

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 5 & 14 \end{bmatrix} = A$$

לבסוף נחשב את  $A^{100}$ :

$$\begin{aligned} A^{100} &= PD^{100}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{100} & 0 \\ 0 & 9^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 4^{100} - 9^{100} & -4^{100} + 9^{100} \\ 2 \cdot 4^{100} - 2 \cdot 9^{100} & -4^{100} + 2 \cdot 9^{100} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**דוגמה 14.** עבור המטריצה  $A$  מדוגמה 13 מצא מטריצה  $C \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$  כך ש- $C^2 = A$ . המטריצה  $C$  היא " $\sqrt[2]{A}$ ". ננסה למצוא פתרון מהצורה " $C = P\sqrt{D}P^{-1}$ ". יש ארבע אפשרויות שמייד רואים עבור " $\sqrt{D}$ ", והן:

$$\cdot \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{bmatrix}$$

נבחר באחת האפשרויות ונקבל

$$\cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

נסיים בבדיקת התוצאה:

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{bmatrix} = A$$

(הערה: ניתן להראות כי במקרה זה יש בדיוק ארבעה פתרונות ב- $M_{n \times n}(\mathbb{Q})$  למשוואה  $X^2 = A$ ).

**משפט 7.** תהי  $A$  מטריצה בגודל  $n \times n$  מעל השדה  $F$ . המטריצה  $A$  ניתנת לליכסון מעל  $F$  אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים.

1. הפולינום האופייני  $p_A(x)$  מתפרק באופן הבא:

$$p_A(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdots (x - \lambda_m)^{e_m}$$

כאשר  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  הם סקלרים שונים ב- $F$  ו- $e_1, \dots, e_m$  הם מספרים שלמים חיוביים.

2. לכל  $i$  הריבוי האלגברי של הערך העצמי  $\lambda_i$  שווה לריבוי הגיאומטרי שלו.

**הוכחה.** א. נניח כי  $A$  ניתנת לליכסון. תהיינה  $P, D$  מטריצות כך ש- $P$  הפיכה,  $D = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix}$

אלכסונית ו- $A = PDP^{-1}$  אז

$$\cdot p_A(x) = p_D(x) = (x - \mu_1) \cdots (x - \mu_n)$$

יהיו  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  הסקלרים השונים המופיעים בסדרה  $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n)$ , ונסמן ב- $e_i$  את מספר הפעמים ש- $\lambda_i$  מופיע בסדרה  $\mu$ . אז

$$\cdot p_A(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdots (x - \lambda_m)^{e_m}$$

ו-  $n = \sum_{i=1}^m e_i$ . לכל  $j$  תהי  $v_j$  עמודה מס'  $j$  במטריצה  $P$ . אז  $v_j$  הוא וקטור עצמי של  $A$  השייך לערך העצמי  $\mu_j$ . נגדיר  $v := (v_1, \dots, v_n)$ , ולכל  $i$  נגדיר את  $v_i$  להיות תת-הסדרה של  $v$  המורכבת מהוקטורים העצמיים השייכים ל- $\lambda_i$ . אז סדרה בת"ל בתת-המרחב  $V_{\lambda_i}$  ו- $\#v_i = e_i$ . לכן  $\dim(V_{\lambda_i}) \geq \#v_i = e_i$ . ע"פ מסקנה 4 מקבלים

$$n \geq \sum_{i=1}^m \dim(V_{\lambda_i}) \geq \sum_{i=1}^m e_i = n$$

זה מחייב שלכל  $i$  יש שוויון  $\dim(V_{\lambda_i}) = e_i$ .

ב. לכיוון השני, נניח שמתקיימים התנאים 1 ו-2. נשים לב שהפרוק של  $p_A(x)$  גורר ש- $n = \sum_{i=1}^m e_i$ . לכל  $i$  נבחר בסיס סדור  $v_i$  לתת-המרחב  $V_{\lambda_i}$ . ע"פ משפט 5 הסדרה המשורשרת  $v := (v_1, \dots, v_m)$  היא בת"ל. אבל

$$\#v = \sum_{i=1}^m \#v_i = \sum_{i=1}^m \dim(V_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^m e_i = n$$

לכן בסיס סדור של  $V$  המורכב מוקטורים עצמיים של  $A$ . נרשום  $v := (v_1, \dots, v_n)$  ו-

$$; (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) := (\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{e_1}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{e_m})$$

כלומר  $v_i$  וקטור עצמי השייך לערך העצמי  $\mu_i$ . נגדיר מטריצות  $P := [v_1, \dots, v_n]$  ו-

$$D := \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix} \text{ אז}$$

$$AP = [Av_1, \dots, Av_n] = [\mu_1 v_1, \dots, \mu_n v_n] = [v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix} = PD$$

מש"ל.

ולכן  $A = PDP^{-1}$ .

**אלגוריתם 1. (ליכסון של מטריצה)** נתונה מטריצה  $A \in M_{n \times n}(F)$ .

- חשב את הפולינום האופייני  $p_A(x)$ .
- מצא את שורשי  $p_A(x)$  ב- $F$ , ז"א את הערכים העצמיים של  $A$ . נניח שיש  $m$  ערכים עצמיים שונים  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , עם ריבויים אלגבריים  $e_1, \dots, e_m$  בהתאמה.
- אם  $\sum_{i=1}^m e_i < n$  אז  $A$  איננה ניתנת לליכסון. עוצרים.
- לכל  $i$  מצא בסיס סדור  $v_i$  למרחב העצמי  $V_{\lambda_i}$ , ע"י פתרון המשוואה ההומוגנית  $(\lambda_i I - A)X = O$ .
- אם  $\#v_i < e_i$  לאיזה  $i$  אז  $A$  אינה ניתנת לליכסון. עוצרים.
- כעת  $\sum_{i=1}^m \#v_i = n$ . המטריצה  $P$  שעמודותיה הם הוקטורים בסדרה המשורשרת  $(v_1, \dots, v_m)$  היא הפיכה, והמטריצה  $D := P^{-1}AP$  היא אלכסונית.

**אלגוריתם 2. (ליכסון של אופרטור)** נתון מרחב וקטורי  $V$  ממימד  $n$  מעל השדה  $F$  ואופרטור ליניארי  $T : V \rightarrow V$ .

- מצא בסיס סדור  $v$  של  $V$ .
- תהי  $A := [T]_v$  המטריצה המייצגת את  $T$  ביחס לבסיס הסדור  $v$ .
- אם  $A$  איננה ניתנת לליכסון אז גם  $T$  איננו ניתן לליכסון. עוצרים.

4. יהי  $(u_1, \dots, u_n)$  בסיס סדור של  $F^n$  המורכב מוקטורים עצמיים של  $A$ . נגדיר סדרת וקטורים  $w = (w_1, \dots, w_n)$  ב- $V$  ע"י הנוסחה  $[w_i]_v = u_i$ . אז בסיס מלכסן של  $V$  ביחס ל- $T$ .

**דוגמה 15.** ניקח  $F := \mathbb{R}$ , המרחב

$$V := \{ \text{פולינומים } f(t) \text{ ממעלה } \geq 2 \text{ מעל } \mathbb{R} \}$$

ואופרטור ליניארי  $T : V \rightarrow V$  המוגדר ע"י

$$T(f) := (t+1) \frac{df}{dt}$$

בסיס סדור של  $V$  ניקח את  $v := (t^0, t^1, t^2)$  אז

$$T(t^0) = (t+1) \cdot 0 = 0$$

$$T(t^1) = (t+1) \cdot 1 = t+1 = t^0 + t^1$$

$$T(t^2) = (t+1) \cdot 2t = 2t + 2t^2 = 2t^1 + 2t^2$$

לכן המטריצה המייצגת היא  $[T]_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  הפולינום האופייני הוא

$$p_T(x) = p_A(x) = x(x-1)(x-2)$$

והערכים העצמיים הם  $\lambda_1 := 0, \lambda_2 := 1, \lambda_3 := 2$ . רואים מייד ש- $A$  ניתנת לליכסון. נמצא וקטורים עצמיים ל- $A$  השייכים לערכים עצמיים אלו:

$$u_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

נתרגם לבסיס סדור  $w = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  של  $V$ :

$$f_3(t) = t^0 + 2t^1 + t^2, \quad f_2(t) = t^0 + t^1, \quad f_1(t) = t^0$$

לבסוף נבדוק את התוצאה.

$$T(f_1) = T(t^0) = 0 = \lambda_1 f_1$$

$$T(f_2) = T(t^0 + t^1) = t^0 + t^1 = \lambda_2 f_2$$

$$T(f_3) = T(t^0 + 2t^1 + t^2) = 2t^0 + 4t^1 + 2t^2 = \lambda_3 f_3$$

**דוגמה 16.** נתון הפולינום  $f(x) = x^2 + 5$  עם מקדמים ב- $\mathbb{C}$ . פתור את המשוואה

$$(*) \quad f(X) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{bmatrix}$$

ב- $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ ; כלומר מצא מטריצה  $C$  המקיימת את המשוואה. נרשום  $A := \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{bmatrix}$ . ידוע לנו

כבר כי  $A$  ניתנת לליכסון (ראה דוגמה 12):  $A = PDP^{-1}$  כאשר  $D := \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ . נפתור תחילה את

המשוואה "האלכסונית"

$$f(Y) = D$$



ננסה פתרון אלכסוני  $Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$ . זה אומר שיש לפתור 2 משוואות סקלריות:  $f(y_1) = 4$  ו-  
 $f(y_2) = 9$ . הפתרונות ידועים:  $y_1 := \pm i$  ו- $y_2 := \pm 2$ , כאשר  $i := \sqrt{-1}$ . לכן

$$Y = \begin{bmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{bmatrix}$$

הקשר בין המשתנים  $X$  ו- $Y$  הוא:  $X = PYP^{-1}$ . לכן מצאנו ארבעה פתרונות למשוואה (\*), שהם

$$X := P \begin{bmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

נבחר אחד מהם, נאמר

$$C := P \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i-2 & 2-i \\ 2i-4 & 4-i \end{bmatrix}$$

ענה נעשה בדיקה.

$$\begin{aligned} f(C) &= C^2 + 5I = \begin{bmatrix} 2i-2 & 2-i \\ 2i-4 & 4-i \end{bmatrix}^2 + 5I = \\ &= \begin{bmatrix} 2i-2 & 2-i \\ 2i-4 & 4-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2i-2 & 2-i \\ 2i-4 & 4-i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

לסיום הערה: ניתן להוכיח כי יש בדיוק ארבעה פתרונות למשוואה (\*); אולם זה מעבר ליכולת שלנו בקורס זה.

## מטריצות מרקוב

נסיים את הפרק בשימוש של ליכסון מטריצות לתורת ההסתברות.

**דוגמה 17.** מחקר הראה כי מבין שותי המיצים הטריים, מי שקנה "פריגת" בשבוע מסויים יקנה בהסתברות  $\frac{1}{2}$  "פריגת" בשבוע הבא, ויקנה בהסתברות  $\frac{1}{2}$  "פרימור" בשבוע הבא. מי שקנה "פרימור" בשבוע מסויים יקנה בהסתברות  $\frac{3}{4}$  "פריגת" בשבוע הבא, ויקנה בהסתברות  $\frac{1}{4}$  "פרימור" בשבוע הבא. בסופרמרקט מסויים הצריכה היתה בשבוע כלשהו 700 בקבוקים "פריגת" ו-300 בקבוקים "פרימור". מה תהיה הצריכה אחרי הרבה זמן (נאמר כעבור 10 שבועות)? מניחים כי סה"כ הצריכה השבועית נשמרת: 1000 בקבוקים. (הנתונים מומצאים כמובן).

נסמן ב- $b_n$  את מספר בקבוקי "פריגת" כעבור  $n$  שבועות, ובדומה נסמן ב- $c_n$  מספר בקבוקי "פרימור" כעבור  $n$  שבועות. תנאי ההתחלה הם  $b_0 := 700$  ו- $c_0 := 300$ . הנוסחה הרקורסיבית לחישוב  $b_{n+1}$  ו- $c_{n+1}$  היא:

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{4}c_n, \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

נגדיר מטריצה  $A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$  אז

$$\begin{bmatrix} b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} b_n \\ c_n \end{bmatrix},$$

ומשום כך

$$\begin{bmatrix} b_n \\ c_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

אנו רוצים לדעת האם קיים הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} b_n \\ c_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \end{bmatrix}$$

תחילה נבדוק האם קיים הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ . הכוונה היא זו: נסמן  $A^n = \begin{bmatrix} a_{11;n} & a_{12;n} \\ a_{21;n} & a_{22;n} \end{bmatrix}$ , כך שיש לנו 4 סדרות של מספרים ממשיים  $\{a_{11;n}\}_{n=0}^{\infty}, \dots, \{a_{22;n}\}_{n=0}^{\infty}$ . האם קיימים הגבולות  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{11;n}, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{22;n}$ ? הפולינום האופייני של  $A$  הוא

$$p_A(x) = x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = (x-1)\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

הערכים העצמיים של  $A$  הם:  $\lambda_1 := 1$  ו-  $\lambda_2 := -\frac{1}{4}$ . וקטורים עצמיים של  $A$  הם  $v_1 := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

ו-  $v_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . המטריצות המלכסנות הן  $P := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  ו-  $P^{-1} := \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ . כעת לכל  $n$  מקבלים

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{4})^n \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + (-\frac{1}{4})^n & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(-\frac{1}{4})^n \\ 1 - (-\frac{1}{4})^n & 1 + \frac{3}{2}(-\frac{1}{4})^n \end{bmatrix}$$

לכן הגבול קיים והוא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

נחזור לבעיה המקורית שלנו. אחרי "הרבה זמן" המצב היציב הוא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} (A^n \begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \right) \begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 700 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 400 \end{bmatrix}$$

כלומר הצריכה אחרי זמן רב היא בקירוב 600 בקבוקים "פריגת" ו- 400 בקבוקים "פרימור".  
אנו רואים תופעה מעניינת, שהמצב היציב  $\begin{bmatrix} 600 \\ 400 \end{bmatrix}$  איננו תלוי במצב ההתחלתי  $\begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$ , אלא רק בכך ששה"כ הצריכה היא 1000 בקבוקים בשבוע.

**הגדרה 8. מטריצת מרקוב** היא מטריצה  $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  כך ש-  $0 \leq a_{ij} \leq 1$ , ובכל עמודה  $j$  סכום האיברים הוא  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ .

התאוריה של מטריצות מרקוב אומרת שהמצב הכללי דומה לדוגמה שלנו; כלומר ל-  $A$  יש ערך עצמי  $\lambda_1 = 1$ , ויתר הערכים העצמיים מקיימים  $|\lambda_i| \leq 1$ . יתר על כן אם  $a_{ij} > 0$  לכל האינדקסים אז  $|\lambda_i| < 1$  עבור  $i \geq 2$ . לכן הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$  קיים. בנוסף ניתן להוכיח כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = [v_{\text{stab}}, \dots, v_{\text{stab}}]$$

כאשר  $v_{\text{stab}}$  הוא וקטור ההתפלגות היציב.